

IRCAM — UNIVERSITÉ PARIS VI

MÉMOIRE DE MASTER ATIAM

**Etude combinatoire
et informatique
du caractère diatonique
des échelles à sept notes**

Julien Junod

*Sous la direction de
Moreno Andreatta*



18 juin 2008

0.1 Abstract

Seven note scales in the twelve tone chromatic gamut are investigated following three directions. The sizes of their catalogues are computed with respect to affine relations (the action of the cyclic, dihedral and affine groups) as well as partitions generated by the Z-relation and permutations of the intervallic structure and content. Then we turn to the mathematical foundations of the *diatonic bell*, a graphical representation of such catalogues introduced by Pierre Audétat. Every possible scale is compared with the diatonic scale, using links between the chromatic cyclic groups and a model of the *helix* of fifths based on integer distances measured in fifth starting from the D key, which sits on the centre of the cycle of fifths. Finally, the seven note scales are compared using the discrete Fourier transform, showing their geometric properties.

Keywords : mode, scale, set theory, diatonic, Pólya's theorem, Burnside's lemma, cycle of fifths, symmetry, generated scale, maximally even scale, discrete Fourier transform.

0.2 Résumé

Trois aspects de l'étude des échelles à sept notes et de leurs modes dans un total chromatique de douze notes sont abordés dans ce travail. Tout d'abord la taille d'un catalogue est calculée à l'aide du lemme de Burnside et du théorème de Pólya, en tenant compte des équivalences par action des groupes cyclique, diédral et affine. La Z-relation, la relation par permutation de la structure intervallique (Estrada) ainsi que par permutation du contenu intervallique (une variante) sont également passées en revue. Ensuite, la représentation graphique du catalogue telle que proposée par Pierre Audétat avec sa *cloche diatonique* est formalisée mathématiquement. Chaque échelle est comparée à l'échelle diatonique au moyen de la modélisation traditionnelle du monde chromatique par un groupe cyclique, et du monde diatonique par une *hélice* des quintes, en faisant correspondre à chaque note sa distance en quintes par rapport au ré, qui occupe une position centrale dans le cycle des quintes. Finalement, les propriétés géométriques des différentes échelles sont comparées à l'aide de leur transformée de Fourier.

Mots clé : mode, échelle, set theory, théorie diatonique, théorème de Pólya, lemme de Burnside, cycle des quintes, symétrie, gamme monogène, gamme bien répartie, transformée de Fourier discrète.

Table des matières

0.1	Abstract	2
0.2	Résumé	2
1	Introduction	9
1.1	Etat de l'art	10
1.2	Conventions et notations	12
2	Dénombrements	15
2.1	Echelles	16
2.2	Modes	16
2.3	Cas général sans symétries	18
2.4	Symétries affines	18
2.5	Techniques de dénombrements	22
2.5.1	Le théorème de Pólya	23
2.5.2	Le lemme de Burnside	26
2.6	Z-Relations	27
2.7	La relation de Julio Estrada	30
2.8	Dénombrements et groupes associés	32
2.9	Différences et similitudes entre relations	33
3	La cloche diatonique de Pierre Audétat	37
3.1	Clefs de lecture	38
3.2	Symétrie du ré et hélice des quintes	38
3.3	Construction des représentants	40
3.3.1	Altérations chromatiques	41
3.3.2	Degrés diatoniques	43
3.3.3	Distributions centrées	44
3.3.4	Distributions compactes	46
3.4	Conditions sur les cardinalités	53
4	Caractéristiques des échelles	55
4.1	Indices	56
4.1.1	Distance euclidienne	56
4.1.2	Symétrie	57
4.1.3	Périodicité	60

4.1.4	Répartition	60
4.1.5	Mesure dia/chro d'Anatol Vieru	61
4.2	Comparaison entre indices	64
5	Conclusion et perspectives	67
A	Appendice	69
A.1	Echelles	69
A.2	Permutations	81

Table des figures

2.1	Le groupe cyclique $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ vu comme un graphe orienté	17
2.2	Transformations affines de \mathbb{Z}_{12} , de T_0 à T_5	20
2.3	Transformations affines de \mathbb{Z}_{12} , de T_6 à T_{11}	21
2.4	Partition par \sim_{A_c}	22
2.5	Partition par \sim_Z	29
2.6	Partition par \sim_E	31
2.7	Partition par \sim_{E^*}	31
3.1	La cloche diatonique	39
3.2	Symétrie du ré	40
3.3	Associations entre degrés	47
3.4	Ordre des degrés diatoniques et des altérations chromatiques . . .	51
4.1	Exemple de mesure de distance euclidienne δ	58
4.2	Indices de distance euclidienne δ	58
4.3	Exemples de mesure de symétrie σ	59
4.4	Indice de symétrie σ par échelle	59
4.5	Exemples de mesure de périodicité π	60
4.6	Indice de périodicité π par échelle	61
4.7	Exemples de mesure de répartition ε	62
4.8	Indice de répartition ε par échelle	62
4.9	Exemple de la mesure dia/chro κ d'A. Vieru	63
4.10	Indices dia/chro κ par échelle	63
4.11	Comparaison des indices	65
A.1	Echelles de 1 à 5	70
A.2	Echelles de 6+ à 8-	71
A.3	Echelles de 9+ à 11-	72
A.4	Echelles de 12+ à 14-	73
A.5	Echelles de 15+ à 17-	74
A.6	Echelles de 18 à 21-	75
A.7	Echelles de 22+ à 25+	76
A.8	Echelles de 25- à 28	77
A.9	Echelles de 29 à 32+	78

A.10 Echelles de 32- à 35+	79
A.11 Echelles de 35- à 38	80

Liste des tableaux

1.1	Conventions de notation	13
2.1	Orbites des transformations affines	25
2.2	Nombre d'échelles par cardinalité	25
2.3	Tailles des la partition \mathcal{S}_c^d / \sim_E	33
2.4	Classes d'équivalence dans \mathcal{S}_{12}^7	35
2.5	Nombre de classes d'échelles et de modes	36
4.1	Propriétés des échelles	56
A.1	Permutations, échelles \mathcal{S}_1 à \mathcal{S}_{26}	82
A.2	Permutations, échelles \mathcal{S}_{27} à \mathcal{S}_{36}	83
A.3	Permutations, échelles \mathcal{S}_{37} à \mathcal{S}_{38}	84

Chapitre 1

Introduction

La tour diatonique, la plus vénérable, était le donjon de la citadelle. On posait DO RE MI FA SOL LA SI DO, et la gamme diatonique entraînait toute armée dans la garnison de l'artisan compositeur. [...] Quant aux tours modales, si puissantes lors du plain-chant, elles n'étaient plus que des bastions.

E. Costère, Mort ou transfiguration de l'harmonie, 1962.

Composante essentielle du jazz puis de la musique populaire, les modes sont redevenus d'actualité au début du vingtième siècle pour certains musiciens issus de la tradition classique. Debussy, Bartók, Stravinsky Hindemith ou Messiaen voyaient là un moyen d'échapper au carcan tonal en reprenant les principes issus du plain-chant. Nul besoin de revenir aux modes ecclésiastiques de l'échelle diatonique, la gamme par tons ou les modes à transposition limitées constituent des exemples convaincants des possibilités qu'offre l'extension du système modal à d'autres échelles. Pourtant, une théorie aussi aboutie que celle de l'harmonie fait encore défaut. Les modes n'ont pas encore livré leurs derniers secrets, sans doute parce qu'on ne leur a pas consacré l'attention qu'ils méritaient. A défaut d'en permettre une compréhension approfondie, ce travail se propose d'étudier un outil qui en permet l'exploration systématique.

Fruit d'un patient travail de collectionneurs ou résultat systématique de la combinatoire, les catalogues d'échelles et d'accords se présentent sous forme de liste de chiffres ou de notes, et peuvent rebuter par leur aspect aride. La *cloche diatonique* mise au point par Pierre Audétat¹ répond à ce problème en proposant une représentation graphique de la totalité des 492 modes des échelles à sept notes. Compacte et détaillée, elle permet une vision globale de l'ensemble du catalogue, sans rien perdre de sa structure ni de sa complexité locale.

¹Musicien, compositeur et professeur au Conservatoire de Lausanne-Haute Ecole de Musique (CdL-HEM). Un premier document de 2007, interne à cette institution, expose ses travaux sur le sujet, réalisés les années précédentes de manière indépendante (Audétat, 2006).

Véritable *atlas* des modes, elle se lit comme une carte de géographie, de sorte que la consultation, la navigation, la comparaison entre modes s'en trouvent facilitées.

Le présent travail, réalisé au sein de l'équipe des représentations musicales de l'IRCAM, s'attelle à la formalisation mathématique de la cloche². Le chapitre 2 pose les définitions des objets étudiés. On y présente les échelles et modes à sept notes dans un total chromatique à douze notes, ainsi que leurs transformations et relations d'équivalence. Tels sont les deux ingrédients nécessaires au calcul de la taille et à l'établissement d'un catalogue à l'aide de moyens *set théoriques*. Le chapitre 3 traite spécifiquement de la cloche diatonique. On y trouvera la construction des représentants des classes d'échelles et des modes qui la constituent. Le chapitre 4 caractérise les différentes échelles au moyen de la transformée de Fourier discrète (TFD) et étudie les corrélations entre ces différents indices et l'ordre linéaire induit par la cloche entre les pôles diatonique et chromatique. On trouvera en annexe les tables complètes des figures illustrant les différentes échelles et leur transformée de Fourier, ainsi qu'un bref extrait de l'exploration combinatoire empirique des problèmes d'optimisation du chapitre 3.

1.1 Etat de l'art

Luigi Verdi dans "L'Histoire de la *Set Theory* d'un point de vue européen" (Andreatta et al., 2008) présente un panorama complet des tentatives successives d'établir un catalogue d'accords ou d'échelles, qui se réduisent dans cette théorie à des agrégats de classes de hauteurs. La plupart de ces recherches se sont concentrées sur la microtonalité, soit sur un total chromatique c différent de nos douze demi-tons habituels, ou encore sur la division de l'octave en d parties égales, d prenant d'autres valeurs que les sept degrés de la gamme majeure ou mineure, notamment des diviseurs de douze, ce qui permet par exemple l'utilisation des modes à transposition limitée, chers à Messiaen.

La première taxonomie d'échelles à sept notes remonte à Busoni (1907) qui parvient par variation de la structure intervallique à en dénombrer 113, mais une distinction claire entre échelles et leurs modes fait encore défaut. Suit un deuxième catalogue d'accords à sept notes de Hába (1927), incomplet lui aussi. Barbour (1949) est le premier à produire le nombre correct de 66 classes d'échelles équivalentes par transposition. On trouve également un catalogue complet de toutes les cardinalités chez Costère (1954). Citons finalement les

²De manière complémentaire, les vertus pédagogiques de cette représentation font l'objet d'une recherche parallèle au CdL-HEM. Elle est dirigée par Pierre Audétat et j'y suis également associé. Cette collaboration doit permettre la réalisation d'une version interactive de l'atlas, que l'on trouvera sur la toile à l'adresse suivante :

<http://www.cloche-diatonique.ch/>

On peut la considérer comme une annexe à ce document. Toutes les échelles et leurs caractéristiques y figurent. Des exemples sonores sont également à disposition.

travaux de Forte (1973) dont le catalogue d'ensembles de classes de hauteurs (ECH) fait référence. Parallèlement, en Europe de l'Est, le compositeur roumain Vieru publie son recueil de modes (Vieru, 1980).

Ces derniers exemples proviennent de la musicologie systématique. On peut citer deux autres catalogues destinés à l'usage des musiciens, présentés en notation musicale. Ils comprennent en plus des échelles des motifs mélodiques et constituent des recueils de gammes à travailler : Le "Thesaurus of Scales and Melodic Patterns" (Slonimsky, 1947) est issu de la tradition classique mais jouit d'un statut de référence dans le monde du jazz depuis que John Coltrane l'y a popularisé. "Repository of Scales and Melodic Patterns" (Lateef, 1981) vient quant à lui directement du jazz.

Un aspect important de la cloche est la position centrale qu'occupe la note ré dans le cycle des quintes. Ce n'est pas l'ambition de ce tour d'horizon de la littérature de présenter une histoire exhaustive d'une telle symétrie, bien que ce sujet le mériterait. Cette position privilégiée a dû être relevée par bon nombre de musiciens, à commencer par les facteurs de claviers dont la disposition des touches le reflète, involontairement ou non. Mais le fait qu'une inversion change le caractère majeur et mineur d'un accord, et que la tradition tonale distingue les graves des aigus a sans doute empêché d'en saisir toute la portée. Il est cependant remarquable de constater qu'on la trouve déjà dans la toute première tentative de formalisation algébrique des hauteurs par Durutte. Il y présente un mode d'évaluation des intervalles en quintes en prenant le ré comme référence (Durutte, 1855, page 64, tableau 1), soit exactement les choix de position et d'échelle de la cloche diatonique (section 3). Il parvient ainsi aux 31 valeurs d'intervalles possibles que l'on peut ancrer sur le ré : quinze altérations négatives notées par des (double-) bémols, le même nombre de positives notées par des dièses, plus le ré, neutre. Plus tard, l'organiste Denéréaz le soulignera aussi mais dans le contexte plus ésotérique de son "Cours d'harmonie" (Denéréaz, 1937).

Dans la tradition de la musique dodécaphonique, le catalogue de Forte ne privilégie aucune échelle par rapport à d'autres. Pourtant, toutes ne sont pas égales. La prédominance dans la musique tonale des gammes majeure et mineure, contenues dans l'échelle diatonique, ainsi que ses propriétés mathématiques remarquables, en ont fait l'objet d'étude privilégié de la *set theory* diatonique apparue à la fin du vingtième siècle. Initiée par Clough (1979), celle-ci étudie la traduction des pas diatoniques (réguliers entre degrés de l'échelle) sur le plan chromatique (irrégularités dues à la variation des distances ton/demi-ton de ceux-ci). Les notions développées sont celles de *profondeur d'échelle* (Gamer, 1967b,a; Browne, 1981), de *variété et multiplicité* (Clough and Myerson, 1985), de *gamme monogène et bien formée* (Carey and Clampitt, 1989), et tout spécialement de *gamme bien répartie* (Clough and Douthett, 1991), qui rejoint les travaux de recherche sur les divisions de l'octave en parties égales initiés par Alaleona (1911). L'intérêt de la gamme diatonique provient en grande partie de ce qu'une telle division exacte en sept parties égales est impossible. Le livre de Johnson (2003) offre un panorama de ses propriétés et des théories de l'école américaine.

En musicologie cognitive, Eytam Agmon parvient à des résultats similaires, mais de manière indépendante en entreprenant la démarche inverse, à savoir

s’inspirer de processus perceptifs pour partir du total chromatique et aller vers les degrés diatoniques (Agmon, 1989, 1996, 1995). Il propose également une définition de la diatonicité qui est aussi la plus convaincante en ce qu’elle se base sur les deux propriétés d’*efficacité* (les intervalles diatoniques couvrent la totalité des intervalles chromatiques) et de *cohérence* (monotonie de la progression de ceux-ci par rapport aux intervalles diatoniques) que cette échelle ne partage avec aucune autre. Dans un domaine similaire, citons encore Balzano (1982, 1980) qui s’est occupé de la perception et de microtonalité.

La transformée de Fourier discrète permet d’unifier une bonne partie des résultats disparates de la théorie diatonique américaine. Cette idée qui remonte à Lewin (1960), a permis à Quinn (2004) de systématiser l’étude des ensembles d’échelles de hauteur puis à Amiot (2007) d’appliquer cette technique à l’échelle diatonique en proposant un formalisme plus propre que celui des travaux originaux de l’école américaine.

1.2 Conventions et notations

Le choix des couleurs utilisé pour la représentation graphique des échelles dans le cercle chromatique (diagrammes en horloge) diffère de la pratique mathématique pour suivre celle des claviers : Un rond blanc indique que la note fait partie de l’échelle (touche blanche), alors qu’un rond noir désigne une note laissée de côté (touche noire).

L’indice des échelles correspond au rang de la classe diédrale dans la cloche (voir la section 3.1). L’échelle diatonique \mathcal{S}_1 est la première, et l’échelle chromatique \mathcal{S}_{38} , la dernière.

Les polynômes sont traditionnellement définis sur des anneaux commutatifs et les matrices sur des corps. On verra apparaître des polynômes définis sur les nombres naturels \mathbb{N} ou des matrices à valeurs booléennes $\{0, 1\}$. cette notation a pour seul souci de montrer quels éléments entrent en ligne de compte. Pour retrouver la rigueur mathématique, il suffira de les remplacer par un ensemble idoine les contenant.

Symbole	Description
c	Nombre de notes (demi-tons) formant le total chromatique
d	Nombre de degrés (notes) formant l'échelle
\mathcal{S}	Echelle
χ	Degré chromatique
s	Mode
\mathcal{M}	Ensemble des modes
δ	Degré diatonique
\mathcal{D}	Ensemble des vecteurs de degrés diatoniques
a	Altération chromatique d'un degré
A	Altération d'une échelle
\mathcal{A}	Ensemble des altérations chromatiques
$d_{\mathbb{Z}_c}$	Distance dans le cercle chromatique
$\text{sgn}_{\mathbb{Z}_c}$	Direction dans le cercle chromatique
$d_{\mathbb{Z}}$	Distance dans l'hélice diatonique
\mathbb{N}	Nombre entiers (0 inclus)
\bar{n}	Classe de congruence $\bar{n} = n + c\mathbb{Z}$
\mathbb{Z}_c	Groupe cyclique $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ d'ordre c
\mathbb{Z}_c^\times	Ensemble des unités de l'anneau commutatif $(\mathbb{Z}_c, +, \cdot)$
\mathbb{D}_c	Groupe diédral de taille $ \mathbb{D}_c = 2c$
\mathbb{A}_c	Groupe affine
π	Permutation
$\text{Perm}(\mathbb{Z}_c)$	Groupe symétrique (des permutations)
ϕ	Fonction indicatrice d'Euler
$T_{\bar{b}}$	Transposition de \bar{b} demi-tons
$I_{\bar{b}}$	Inversion autour de $\frac{\bar{b}}{2}$
$M_{\bar{u}}$	Multiplication par \bar{u}
\mathbf{x}	Matrices et vecteurs apparaissent en gras
$M_{m \times n}(\mathbb{K})$	Matrices de $m \times n$ à coefficients dans \mathbb{K}
$\mathbf{1}_{\mathcal{S}}$	Fonction caractéristique de l'échelle \mathcal{S}
$\mathcal{F}\{f\}$	Transformée de Fourier discrète de f
$\mathcal{F}^{-1}\{F\}$	Transformée de Fourier discrète inverse de F
IC	Contenu intervallique de Lewin
IV	Vecteur intervallique de Forte
IS	Structure intervallique de Vieru

TAB. 1.1 – Liste et description des symboles utilisés dans le texte.

Chapitre 2

Dénombrements

Avant de passer en revue une collection d'objets, il est préférable d'en connaître la quantité exacte. Cette section se propose de dénombrer les échelles et les modes. Encore faut-il savoir précisément ce que l'on veut compter : La question est moins triviale qu'il n'y paraît, tant les termes de *gamme*, de *mode* et d'*échelle* sont utilisés les uns pour les autres, avec des significations parfois fort diverses, au point de nécessiter des documents de mise au point de la part des musicologues (Picard, 2005). D'autre part, ce ne sont pas tant les objets eux-mêmes que des classes ou types d'objets qui nous intéressent, et les relations d'équivalence entre objets ne font pas nécessairement l'unanimité. Si l'équivalence par transposition est couramment admise (le caractère majeur ou mineur d'une gamme ne dépend pas de sa tonique), ce n'est pas le cas de l'inversion, laquelle transforme un accord parfait majeur en mineur, sans parler des transformations affines qui ne sont même plus des isométries.

Le vocabulaire peut parfaitement se restreindre à l'*échelle* et au *mode*. La gamme majeure correspondant alors au mode ionien de l'échelle diatonique, et la gamme mineure naturelle à son mode éolien. Les autres gammes mineures ont également leurs échelle et mode associés. La distinction entre ces deux derniers termes réside dans la présence ou non d'une notion d'ordre. Les échelles, vues comme un agrégat de notes simultanées, en sont dépourvues. Ce formalisme s'inscrit dans le cadre plus général de la *set theory*, pour laquelle les notes appartiennent à des classes de hauteurs (équivalence par octave), et dont les collections sont utilisées pour décrire les accords et les gammes. Nous héritons ainsi de la panoplie d'outils de cette approche théorique et pouvons appliquer le lemme de Burnside et le théorème de Pólya pour dénombrer les échelles. Le premier est techniquement plus simple, le second plus puissant, mais les deux reposent sur des principes identiques. La section 2.5 illustrera leur similitude.

Ce cadre ne suffit pourtant plus à distinguer les différents modes d'une même échelle. Une notion d'ordre circulaire, inspirée de la théorie des graphes, est alors nécessaire pour rendre compte de la succession précise des degrés de chaque mode. Une fois le nombre total d'échelles connus, le nombre de modes s'en déduit naturellement.

2.1 Echelles

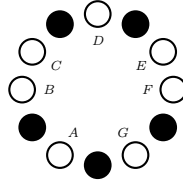
Définition 1. Une *échelle* \mathcal{S} à d degrés dans un univers ou total chromatique à c demi-tons est un sous-ensemble de \mathbb{Z}_c de cardinal d . L'**ensemble des échelles** \mathcal{S}_c^d à d degrés dans un univers chromatique à c demi-tons sera noté

$$\mathcal{S}_c^d := \left\{ \mathcal{S} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_c) \mid |\mathcal{S}| = d \right\} \quad (2.1)$$

Exemple 1. La symétrie du ré (voir 3.2) suggère d'associer non pas do à la classe $\bar{0} := 0 + 12 \cdot \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_{12}$ comme on le fait habituellement, mais de choisir ré comme classe de référence. L'échelle diatonique s'exprime alors comme

$$\mathcal{S}_1 := \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{10}\} \quad (2.2)$$

que l'on représente habituellement comme une horloge dans laquelle chaque classe de hauteur correspond à une heure ($\bar{0}$ à midi, $\bar{1}$ à une heure, etc.).



2.2 Modes

Tout groupe cyclique \mathbb{Z}_c induit naturellement un ordre circulaire, que l'on peut formaliser en lui associant un graphe orienté $D_{\mathbb{Z}_c}$, soit un cycle de longueur c dont les arcs relient deux éléments successifs du cercle.

1. Ensemble des sommets :

$$V(D_{\mathbb{Z}_c}) = \{\bar{n} \in \mathbb{Z}_c\} \quad (2.3)$$

2. Ensemble des arcs :

$$A(D_{\mathbb{Z}_c}) = \left\{ (\bar{n}, \bar{n}') \in V^2(D_{\mathbb{Z}_c}) \mid \bar{n}' - \bar{n} = \bar{1} \right\} \quad (2.4)$$

L'orientation du graphe est nécessaire, car le sens dans lequel on tourne compte également : le deuxième degré d'un mode est différent du septième (à moins d'avoir affaire à une échelle symétrique).

Définition 2. Un **cercle ordonné** est un groupe cyclique \mathbb{Z}_c de longueur c muni de la relation d'ordre circulaire $<$ induite par (2.4).

$$\bar{n} < \bar{n}' \Leftrightarrow (\bar{n}, \bar{n}') \in A(D_{\mathbb{Z}_c}) \quad (2.5)$$

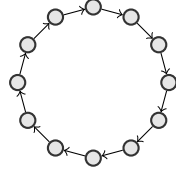


FIG. 2.1 – Le groupe cyclique $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ vu comme un graphe orienté. Les flèches suivent l'orbite du générateur $\bar{1}$.

La notion d'ordre circulaire peut être généralisée aux sous-ensembles du groupe cyclique, en imaginant des connexions *directes* entre éléments, dans le sens suivant.

Définition 3. Soient χ_0 et χ_1 deux éléments d'un sous-ensemble \mathcal{S} de \mathbb{Z}_c . L'élément χ_0 est dit **strictement inférieur** à χ_1 , s'ils sont reliés par un chemin p allant de χ_0 à χ_1 dans \mathbb{Z}_c et ne croisant aucun autre élément χ de \mathcal{S} .

$$\chi_0 < \chi_1 \Leftrightarrow \exists p : p \not\ni \chi, \forall \chi \in \mathcal{S} \setminus \{\chi_0, \chi_1\} \quad (2.6)$$

Exemple 2. Dans l'échelle diatonique $\mathcal{S}_1 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{10}\}$, $\bar{10} < \bar{0}$ mais $\bar{10} \not< \bar{2}$.

Il est à noter que l'appellation *ordre* est abusive, car si la relation est bien antisymétrique, elle n'est pas réflexive (le graphe est simple et ne tolère pas de boucles) et surtout pas transitive. Le problème ne se pose pas dans la mesure où plus que la relation elle-même, c'est sa préservation par les applications qui nous intéresse.

Définition 4. Une application $s : (\mathbb{Z}_d, <) \rightarrow (\mathbb{Z}_c, <)$ entre cercles ordonnés est appelée *morphisme de cercles ordonnés* si elle préserve la structure d'ordre.

$$\bar{k}_0 < \bar{k}_1 \Leftrightarrow s(\bar{k}_0) < s(\bar{k}_1) \quad (2.7)$$

Tous les éléments sont ainsi réunis pour pouvoir définir les modes.

Définition 5. Un **mode** s de l'échelle $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_c^d$ est une indexation circulaire de \mathcal{S} par les degrés du cercle diatonique \mathbb{Z}_d , soit une fonction injective

$$\begin{aligned} s : (\mathbb{Z}_d, <) &\hookrightarrow (\mathbb{Z}_c, <) \\ \bar{k} &\mapsto s(\bar{k}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

ayant les propriétés de

1. compatibilité de l'image

$$\text{Im}(s) = \mathcal{S} \quad (2.9)$$

2. compatibilité avec les ordres circulaires

$$s(\bar{k}_0) < s(\bar{k}_1) \quad \forall \bar{k}_0, \bar{k}_1 \in \mathbb{Z}_d : \bar{k}_0 < \bar{k}_1, \quad (2.10)$$

Le k -ième **degré** du mode s se note

$$\chi_{\bar{k}} := s(\bar{k}) \quad (2.11)$$

Une représentation matricielle est également possible sous forme de vecteur colonne, dont chacune des d composantes est un degré :

$$\mathbf{s} = (\chi_{\bar{k}})_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_c} \in M_{d \times 1}(\mathbb{Z}_c) \quad (2.12)$$

L'injectivité de s découle directement de sa préservation de la relation d'ordre, qui n'est pas réflexive. Chaque échelle à d notes compte autant de modes, car chacune sert de fondamentale à un mode. Pour autant que d soit premier, ce qui interdit les modes à transposition limitée et assure l'existence de d modes distincts, le passage d'un mode à l'autre s'opère par permutation circulaire $\sigma = (d-1 \ \dots \ 1 \ 0)$ des indices. Le n -ième mode s'exprime donc par

$$s_k^{(n)} := s_{\sigma^n(k)}^{(0)} \quad (2.13)$$

On utilisera parfois indifféremment un certain mode s pour désigner l'échelle \mathcal{S} qui le contient, lorsque l'ordre des degrés n'importe pas, comme cela arrive couramment pour l'échelle diatonique : la première énumération du contenu qui vient à l'esprit est le mode ionien.

Les objets étant maintenant bien définis, nous pouvons nous tourner vers leur énumération.

2.3 Cas général sans symétries

Le cardinal de l'ensemble des ensembles de classes de hauteurs (ECH) à d degrés construites dans un univers chromatique de c demi-tons est donné par la formule bien connue

$$|\mathcal{S}_c^d| = \binom{c}{d} \quad (2.14)$$

Exemple 3. Le nombre total d'échelles à $d = 7$ degrés prises dans l'octave divisée en $c = 12$ demi-tons s'élève ainsi à $|\mathcal{S}_{12}^7| = \binom{12}{7} = \frac{12!}{7! \cdot 5!} = 792$.

2.4 Symétries affines

L'étude de l'action du groupe de transformations affines sur l'univers chromatique \mathbb{Z}_c permet de dénombrer des classes d'échelles, définies par des équivalences par transposition (groupe cyclique \mathbb{Z}_c), par transposition et/ou inversion (groupe diédral \mathbb{D}_c) ou encore par ces deux opérations augmentées des cycles de quartes et quintes (groupe affine \mathbb{A}_c).

Définition 6. Une *symétrie affine* de l'anneau commutatif $(\mathbb{Z}_c, +, \cdot)$ dans lui-même est une permutation de \mathbb{Z}_c consistant en une opération linéaire, soit une multiplication $M_{\bar{u}}$ par une unité $\bar{u} \in \mathbb{Z}_c^\times$

$$\begin{aligned} M_{\bar{u}} : \mathbb{Z}_c &\xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_c \\ \bar{n} &\longmapsto \bar{u} \cdot \bar{n} \end{aligned} \quad (2.15)$$

suivie d'une translation $T_{\bar{b}}$ de $\bar{b} \in \mathbb{Z}_c$

$$\begin{aligned} T_{\bar{b}} : \mathbb{Z}_c &\xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_c \\ \bar{n} &\longmapsto \bar{b} + \bar{n} \end{aligned} \quad (2.16)$$

L'appartenance du facteur linéaire \bar{u} aux unités de \mathbb{Z}_c garantit l'injectivité de $M_{\bar{u}}$ et donc que $T_{\bar{b}} \circ M_{\bar{u}}$ est une permutation, soit un isomorphisme de \mathbb{Z}_c .

Définition 7. Le *groupe affine* \mathbb{A}_c est le sous-ensemble de $\text{Perm}(\mathbb{Z}_c)$ défini par l'ensemble des compositions d'une multiplication avec une addition.

$$\mathbb{A}_c := \left\{ T_{\bar{b}} \circ M_{\bar{u}} \mid \bar{b} \in \mathbb{Z}_c \wedge \bar{u} \in \mathbb{Z}_c^\times \right\} \cong \mathbb{Z}_c \times \mathbb{Z}_c^\times \quad (2.17)$$

Les groupes cyclique et diédral sont des sous-groupes du groupe affine, pour lesquels le facteur linéaire u est limité à des sous-groupes du groupe des unités \mathbb{Z}_c^\times .

Définition 8. Le *groupe cyclique* \mathbb{Z}_c est le sous-groupe des translations.

$$\mathbb{Z}_c := \left\{ T_{\bar{b}} \circ M_{\bar{u}} \in \mathbb{A}_c \mid \bar{u} \in \{\bar{1}\} \right\} \cong \mathbb{Z}_c \times \{1\} \quad (2.18)$$

Définition 9. Le *groupe diédral* \mathbb{D}_c est le sous-groupe des translations et inversions.

$$\mathbb{D}_c := \left\{ T_{\bar{b}} \circ M_{\bar{u}} \in \mathbb{A}_c \mid \bar{u} \in \{\bar{1}, \bar{1}\bar{1}\} \right\} \cong \mathbb{Z}_c \times \{-1, 1\} \quad (2.19)$$

Les trois groupes forment une chaîne d'inclusions

$$\mathbb{Z}_c \subseteq \mathbb{D}_c \subseteq \mathbb{A}_c \quad (2.20)$$

que reflète leur taille respective.

$$\begin{aligned} |\mathbb{Z}_c| &= 1 \cdot c \\ |\mathbb{D}_c| &= 2 \cdot c \\ |\mathbb{A}_c| &= \phi(c) \cdot c \end{aligned} \quad (2.21)$$

Exemple 4. Pour $c = 12$, les tailles sont $|\mathbb{Z}_{12}| = 12$, $|\mathbb{D}_{12}| = 24$ et $|\mathbb{A}_{12}| = \phi(12) \cdot 12 = 48$, car $\phi(12) = |\mathbb{Z}_{12}^\times| = |\{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{11}\}| = 4$.

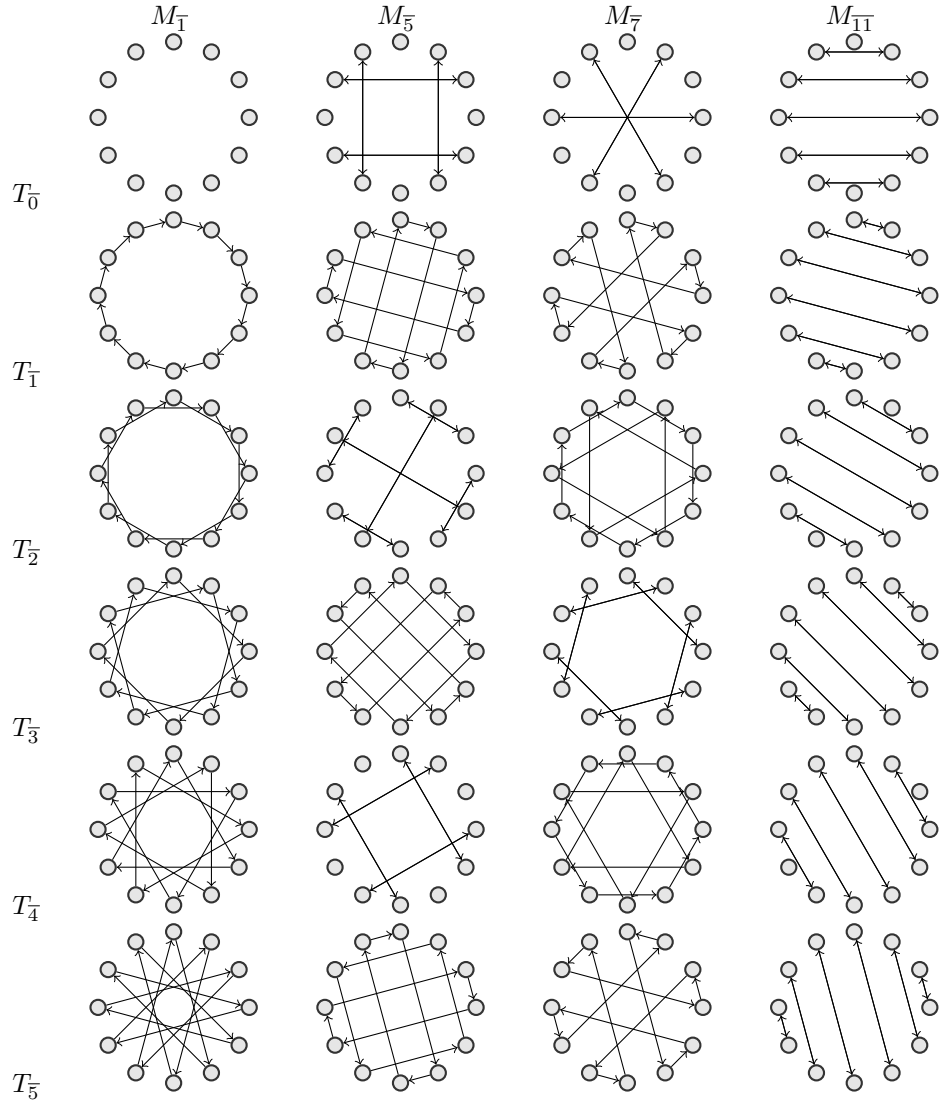


FIG. 2.2 – Cycles des transformations affines $T_{\bar{b}} \circ M_{\bar{a}}$ de \mathbb{Z}_{12} , pour les transpositions $\bar{b} \in \{\bar{0}, \dots, \bar{5}\}$. La trajectoire des orbites est représentée par les flèches. Le $\bar{0}$ se situe à midi, les classes se suivent dans le sens des aiguilles d'une montre.

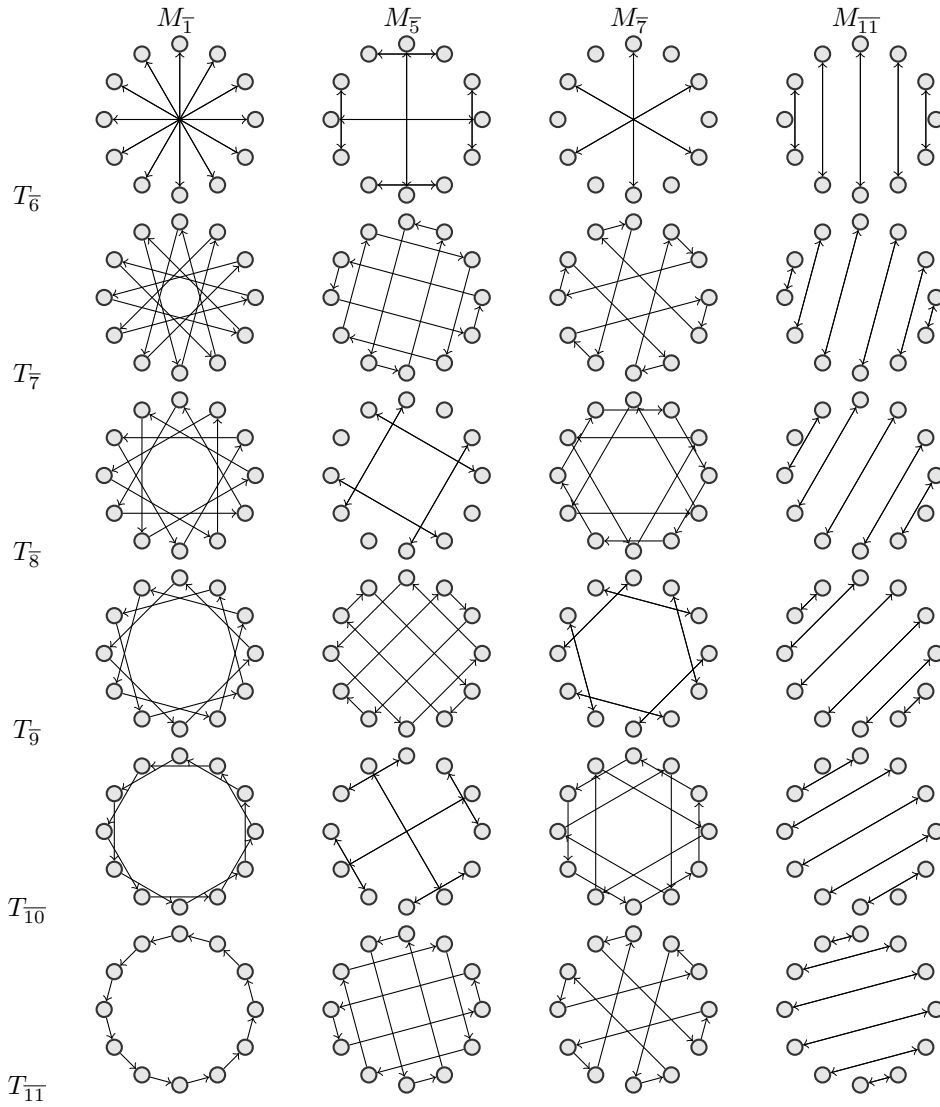


FIG. 2.3 – Suite des cycles des transformations affines $T_{\bar{b}} \circ M_{\bar{u}}$ de \mathbb{Z}_{12} , pour les transpositions $b \in \{\bar{6}, \dots, \bar{11}\}$. La trajectoire des orbites est représentée par les flèches. Le $\bar{0}$ se situe à midi, les classes se suivent dans le sens des aiguilles d’une montre.

Définition 10. Deux échelles \mathcal{S} et \mathcal{S}' dans \mathcal{S}_c^d sont considérées comme **équivalentes par transformation affine**, si l'une est le résultat d'une transformation affine de l'autre.

$$\mathcal{S}' \sim_{\mathbb{A}_c} \mathcal{S} :\Leftrightarrow \exists g \in \mathbb{A}_c : \mathcal{S}' = g(\mathcal{S}) \quad (2.22)$$

Cette relation est bel et bien d'équivalence, car \mathbb{A}_c est un groupe. L'élément neutre (identité $T_{\overline{0}}M_{\overline{1}}$) assure la réflexivité, l'existence d'une inverse assure la symétrie et la transitivité est garantie par la fermeture de la loi de composition.

Exemple 5. L'échelle chromatique \mathcal{S}_{38} est équivalente à l'échelle diatonique \mathcal{S}_1 . Le passage s'effectue au moyen d'une multiplication par sept.

$$\mathcal{S}_{38} = M_{\overline{7}}(\mathcal{S}_1) \quad (2.23)$$

Comme on le verra à la section 3.3.3, l'exigence d'équilibre de la distribution des modes autour du ré pour tous les représentants de la cloche a pour conséquence qu'ils ne sont pas transposés les uns par rapport aux autres. Toutes les équivalences affines existent grâce à des transformations homogènes, une propriété qu'on ne trouve pas chez les *prime forms* d'A. Forte.

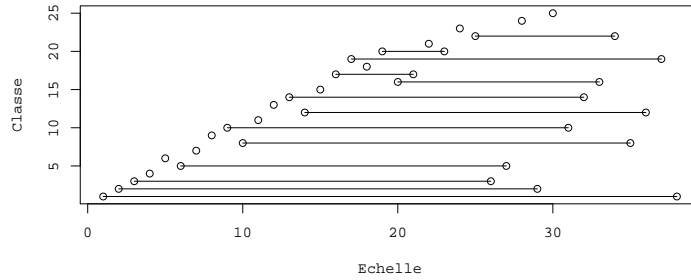


FIG. 2.4 – Partition de $\mathcal{S}_{12}^7/\mathbb{D}_{12}$ par la relation d'équivalence affine $\sim_{\mathbb{A}_c}$

2.5 Techniques de dénombrements

L'élimination de redondances comme l'énumération d'échelles équivalentes par transposition permet de diminuer sensiblement la taille du catalogue et de mettre en lumière des structures plus essentielles. La prise en compte de ces symétries dans le dénombrement s'effectue au moyen du lemme de Burnside ou du théorème de Pólya. Les deux procédures conduisent à des résultats identiques et reposent toutes deux sur l'étude des orbites (cycles) de l'action de chaque élément du groupe de symétrie considéré.

Le théorème de Pólya, au prix d'une plus grande abstraction, offre l'avantage de fournir simultanément le nombre de classes pour chaque cardinalité possible des sous-ensembles, tandis qu'avec le lemme de Burnside, un nouveau calcul est nécessaire à chaque fois. Le lemme est conçu pour s'adresser à la totalité des sous-ensembles, toutes tailles confondues. Restreindre son application aux sous-ensembles d'une cardinalité donnée oblige de passer par l'étude des cycles pour déterminer les points fixes, ce qui illustre sa similarité avec le théorème de Pólya.

2.5.1 Le théorème de Pólya

Cette section suit la présentation du théorème faite par (Benson, 2007), un travail plus approfondi se trouve chez Friperinger (1993, 1999). A chaque échelle \mathcal{S} est associée une *configuration* ou fonction caractéristique $\mathbb{1}_{\mathcal{S}} : \mathbb{Z}_c \rightarrow \{0, 1\}$ qui décrit l'occupation du total chromatique : une valeur de 1 indique que l'échelle \mathcal{S} occupe la position, 0 le contraire. La stratégie du théorème de Pólya consiste à construire un polynôme C , appelé *série de dénombrement des configurations*, dont chaque coefficient c_d indique le nombre $|\mathcal{S}_c^d/G|$ de classes d'équivalence sous l'action du groupe G . Cette construction s'effectue par le biais de l'étude du nombre et de la longueur des cycles de l'action de G . De manière similaire au lemme de Burnside, le nombre de classes se calcule par une moyenne, non pas du cardinal des fixateurs, mais des indices de cycles. Le vecteur

$$\begin{aligned} \mathbf{j} : \mathbb{A}_c &\longrightarrow M_{c \times 1}(\mathbb{N}) \\ g &\longmapsto \mathbf{j}(g) = (j_k(g))_{k=1}^c \end{aligned} \quad (2.24)$$

compte le nombre d'orbites de longueur k dans l'action de g . Il permet de définir le polynôme P_g appelé *indice cyclique de l'élément g* , un polynôme

$$\begin{aligned} P : G &\longrightarrow \mathbb{N}[t_1, \dots, t_c] \\ g &\longmapsto P_g \end{aligned} \quad (2.25)$$

défini comme

$$P_g(\mathbf{t}) := \sum_{k=1}^c t_k^{j_k(g)}, \text{ où } \mathbf{t} = (t_k)_{k=1}^c \quad (2.26)$$

et servant à la définition de l'indice cyclique du groupe G :

$$P_{\mathbb{A}_c}(\mathbf{t}) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} P_g(\mathbf{t}) \quad (2.27)$$

La fonction de poids $w : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{N}[z]$ associe des polynômes aux valeurs de la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\mathcal{S}}$.

$$\begin{aligned} w(0) &:= 1 \\ w(1) &:= z \end{aligned} \quad (2.28)$$

Le théorème de Pólya stipule comment construire la série de dénombrement des configurations C à partir des indices cycliques et de la fonction de poids :

$$C_G \left(\sum_{y \in Y} \right) = P_G \left(\left(\sum_{y \in Y} w^d(y) \right)_{d=1}^c \right) \quad (2.29)$$

Grâce aux choix opérés en (2.28) pour la fonction de poids w , nous obtenons

$$t_d = w^d(0) = w^d(1) = 1^d + z^d = 1 + z^d \quad (2.30)$$

et $C(z) = \sum_{d=0}^c c_d z^d$ sera donc un polynôme de degré c , donc chaque coefficient c_d indiquera le nombre de classes, ou d'orbites de l'action de G dans \mathcal{S}_c^d .

Afin de traiter simultanément le groupe affine \mathbb{A}_c et ses deux sous-groupes \mathbb{Z}_c et \mathbb{D}_c , commençons par partitionner \mathbb{A}_c d'après ses facteurs linéaires.

$$\mathbb{A}_c \bigsqcup_{u \in \mathbb{Z}_c^\times} \mathbb{A}_c^{(u)} \quad (2.31)$$

Avec $\mathbb{A}_c^{(u)} := \left\{ T_{\bar{b}} \circ M_{\bar{a}} \mid b \in \mathbb{Z}_c \right\}$. Ce sont les éléments constitutifs des trois groupes.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_c &= \mathbb{A}_c^{(1)} \\ \mathbb{D}_c &= \mathbb{A}_c^{(1)} \uplus \mathbb{A}_c^{(11)} \\ \mathbb{A}_c &= \mathbb{A}_c^{(1)} \uplus \mathbb{A}_c^{(5)} \uplus \mathbb{A}_c^{(7)} \uplus \mathbb{A}_c^{(11)} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dans le cas qui nous intéresse, $c = 12$. Le nombre j_k d'orbites de longueur k de l'action de chaque élément $g \in \mathbb{A}_c$ peut être déduit des figures 2.2 et 2.3 et se trouvent résumés dans le tableau 2.1.

Sur cette base, on construit les indices cycliques des trois groupes.

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{Z}_{12}}(\mathbf{t}) &= \frac{1}{|\mathbb{Z}_{12}|} P_{\mathbb{A}_c^{(1)}}(\mathbf{t}) \\ &= \frac{1}{12} \{t_1^{12} + t_2^6 + 2t_3^4 + 2t_4^3 + 2t_6^2 + 4t_{12}\} \\ P_{\mathbb{D}_{12}}(\mathbf{t}) &= \frac{1}{|\mathbb{D}_{12}|} \{P_{\mathbb{A}_c^{(1)}}(\mathbf{t}) + P_{\mathbb{A}_c^{(11)}}(\mathbf{t})\} \\ &= \frac{1}{24} \{t_1^{12} + 7t_2^6 + 2t_3^4 + 2t_4^3 + 2t_6^2 + 4t_{12} + 6t_1^2 t_2^5\} \\ P_{\mathbb{A}_{12}}(\mathbf{t}) &= \frac{1}{|\mathbb{A}_{12}|} \{P_{\mathbb{A}_c^{(1)}}(\mathbf{t}) + P_{\mathbb{A}_c^{(5)}}(\mathbf{t}) + P_{\mathbb{A}_c^{(7)}}(\mathbf{t}) + P_{\mathbb{A}_c^{(11)}}(\mathbf{t})\} \\ &= \frac{1}{48} \{t_1^{12} + 12t_2^6 + 2t_3^4 + 8t_4^3 + 6t_6^2 + 4t_{12} + 2t_1^4 t_2^4 \\ &\quad + t_2^4 t_4 + t_1^6 t_2^3 + t_2^3 t_6 + 4t_3^2 t_6 + 6t_1^2 t_2^5\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

qui permettent à leur tour le calcul des séries de configuration.

	$T_{\bar{6}}$		$M_{\bar{1}}$		M_5		$M_{\bar{7}}$		$M_{\bar{11}}$	
	k	j_k	k	j_k	k	j_k	k	j_k	k	j_k
$T_{\bar{0}}$	1	12	4	1	6	1	1	2		
			2	4	2	3	2	5		
$T_{\bar{1}}, T_{\bar{5}}, T_{\bar{7}}, T_{\bar{11}}$	12	1	4	3	6	2	2	6		
$T_{\bar{2}}, T_{\bar{10}}$	6	2	2	6	3	2	1	2		
					6	1	2	5		
$T_{\bar{3}}, T_{\bar{9}}$	4	3	4	3	2	6	2	6		
$T_{\bar{4}}, T_{\bar{8}}$	3	4	1	4	3	2	1	2		
			2	4	6	1	2	5		
$T_{\bar{6}}$	2	6	2	6	1	6	1	2		
					2	3	2	5		

TAB. 2.1 – Longueur k et nombre d'orbites $j_k(g)$ des transformations affines $g = T_{\bar{b}} \circ M_{\bar{a}}$ du groupe \mathbb{A}_{12} .

G	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}
\mathbb{Z}_{12}	1	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1
\mathbb{D}_{12}	1	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1
\mathbb{A}_{12}	1	1	5	9	21	25	34	25	21	9	5	1	1

TAB. 2.2 – Nombre de classes d'échelles c_d dans le total chromatique à 12 demi-tons, par cardinalité d de celles-ci, sous l'action du groupe G .

2.5.2 Le lemme de Burnside

Le lemme de Burnside (Burnside, 1897) permet également de déterminer le nombre de classes d'équivalences pour les groupes cyclique, diédral et affine. Ce résultat est donné par la moyenne du cardinal des fixateurs de chaque élément du groupe.

$$|\mathcal{S}_c^d/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathcal{S}_c^{dg}| \quad (2.34)$$

où le fixateur \mathcal{S}_c^{dg} est l'ensemble des éléments de \mathcal{S}_c^d qui sont des points fixes de l'action de g .

$$\mathcal{S}_c^{dg} := \left\{ \mathcal{S} \in \mathcal{S}_c^d \mid g(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \right\} \quad (2.35)$$

Tout le travail consiste alors à calculer le cardinal du fixateur de chaque élément du groupe affine \mathbb{A}_c .

Les orbites de g définissent une partition de \mathbb{Z}_c . Une échelle $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_c^d$ sera un point fixe de g uniquement si les orbites sont soit totalement occupées par des éléments de \mathcal{S} , soit totalement vides. La circulation des éléments de \mathcal{S} sous l'action de g s'effectuant au sein des orbites, toute autre configuration verrait apparaître des changements d'états d'occupation, contredisant $g(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Le calcul du cardinal du fixateur revient à compter les différentes manières de remplir complètement certaines orbites en utilisant d éléments.

$$|\mathcal{S}_c^{dg}| = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^c: \sum_{k: n_k > 0} j_k = d} \prod_{k \in \mathbb{Z}_c} \binom{j_k}{n_k} \quad (2.36)$$

où j_k dépend de g et désigne le nombre d'orbites de longueur k , et n_k le nombre d'orbites de longueur k apparaissant dans une configuration particulière \mathcal{S} telle que $g(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

Rappelons que $d = 7$ est premier, ce qui exclut l'existence d'un mode à transposition limitée.

$T_{\bar{b}} M_{\bar{1}}$	$j_k (T_{\bar{b}} M_{\bar{1}})$						$ \mathcal{S}_{12}^{7 T_{\bar{b}}} $
\bar{b}	1	2	3	4	6	12	$\binom{12}{7}$
$\bar{0}$	12						0
$\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{11}$						1	0
$\bar{2}, \bar{10}$					2		0
$\bar{3}, \bar{9}$				3			0
$\bar{4}, \bar{8}$			4				0
$\bar{6}$		6					0

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}_{12}^7/\mathbb{Z}_{12}| &= \frac{1}{|\mathbb{Z}_{12}|} \sum_{b \in \mathbb{Z}_{12}} |\mathcal{S}_{12}^{7 T_{\bar{b}}}| \\ &= \frac{1}{12} \{1 \cdot 792 + 11 \cdot 0\} \\ &= 66 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Le groupe diédral comporte, en plus des transpositions simples, les inversions :

$$I_{\bar{b}}(\bar{n}) := T_{\bar{b}} \circ M_{\overline{11}}(\bar{n}) = \bar{b} - \bar{n} \quad (2.38)$$

$T_{\bar{b}}M_{\overline{11}}$	$j_k(T_{\bar{b}}M_{\overline{11}})$		$ \mathcal{S}_{12}^7 I_{\bar{b}} $
\bar{b}	1	2	
$\overline{2k}$	2	5	$\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1}$
$\overline{2k+1}$		6	0

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}_{12}^7/\mathbb{D}_{12}| &= \frac{1}{|\mathbb{D}_{12}|} \sum_{\bar{b} \in \mathbb{Z}_{12}} \{ |\mathcal{S}_c^{d T_{\bar{b}}} | + |\mathcal{S}_{12}^7 I_{\bar{b}}| \} \\ &= \frac{1}{24} \{ 1 \cdot 792 + 11 \cdot 0 + 6 \cdot 20 + 6 \cdot 0 \} \\ &= 38 \end{aligned} \quad (2.39)$$

$T_{\bar{b}}M_{\overline{5}}$	$j_k(T_{\bar{b}}M_{\overline{5}})$				$ \mathcal{S}_c^{d T_{\bar{b}}M_{\overline{5}}} $
\bar{b}	1	2	3	4	
$\overline{0, 4, 8}$	4	4			$\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{3} + \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}$
$\overline{1, 3, 5, 7, 9, 11}$			3		0
$\overline{2, 6, 10}$		6			0

$T_{\bar{b}}M_{\overline{7}}$	$j_k(T_{\bar{b}}M_{\overline{7}})$					$ \mathcal{S}_c^{d T_{\bar{b}}M_{\overline{7}}} $
\bar{b}	1	2	3	6		
$\overline{0, 6}$	6	3				$\binom{6}{5} \cdot \binom{3}{1} + \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} + \binom{6}{1} \cdot \binom{3}{3}$
$\overline{1, 5, 7, 11}$			2			0
$\overline{2, 4, 8, 10}$		2	1			0
$\overline{3, 9}$		6				0

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}_c^d/\mathbb{A}_{12}| &= \frac{1}{|\mathbb{A}_{12}|} \sum_{\bar{b} \in \mathbb{Z}_{12}} \{ |\mathcal{S}_c^{d T_{\bar{b}} \circ M_1}| + |\mathcal{S}_c^{d T_{\bar{b}} \circ M_5}| + |\mathcal{S}_c^{d T_{\bar{b}} \circ M_7}| + |\mathcal{S}_c^{d T_{\bar{b}} \circ M_{11}}| \} \\ &= \frac{1}{48} \{ (1 \cdot 792 + 11 \cdot 0) + (3 \cdot 40 + 9 \cdot 0) \\ &\quad + (2 \cdot 84 + 10 \cdot 0) + (6 \cdot 20 + 6 \cdot 0) \} \\ &= 25 \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.6 Z-Relations

La transformée de Fourier discrète (TFD) de la fonction caractéristique d'une échelle intervient dans la définition de la Z-relation par le biais du contenu

intervallique. Sa définition est rappelée ici, elle resservira au chapitre 4 lors de la construction de plusieurs indices reprenant tous l'idée de répartition des points autour du cercle.

Définition 11. La *transformée de Fourier* d'une échelle $S \in \mathcal{S}_c^d$ est la transformée de Fourier discrète de sa fonction caractéristique $\mathbb{1}_S$. On se retrouve avec la paire de fonctions d'analyse

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathbb{1}_S\} : \mathbb{Z}_c &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \bar{k} &\mapsto \mathcal{F}\{\mathbb{1}_S\}[\bar{k}] = \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}_c} \mathbb{1}_S[\bar{n}] e^{-i \frac{2\pi}{c} n \bar{n} \bar{k}} \end{aligned} \quad (2.41)$$

et de synthèse.

$$\mathbb{1}_S[\bar{n}] = \frac{1}{c} \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_c} \mathcal{F}\{\mathbb{1}_S\}[\bar{k}] e^{+i \frac{2\pi}{c} \bar{k} \bar{n}} \quad (2.42)$$

L'exponentielle est définie sur \mathbb{C} et non sur \mathbb{Z}_c , mais sa périodicité permet ce raccourci de notation.

$$\begin{aligned} e^{i \frac{2\pi}{c} \bar{n}} &= e^{i \frac{2\pi}{c} (n + \sum_{l \in \mathbb{Z}} lc)} = e^{i \frac{2\pi}{c} n} \cdot e^{i \frac{2\pi}{c} \sum_{l \in \mathbb{Z}} lc} = e^{i \frac{2\pi}{c} n} \cdot \prod_{l \in \mathbb{Z}} e^{i \frac{2\pi}{c} lc} \\ &= e^{i \frac{2\pi}{c} n} \cdot \prod_{l \in \mathbb{Z}} 1 = e^{i \frac{2\pi}{c} n} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Définition 12. Le *contenu intervallique* \mathbf{IC} est le vecteur

$$\begin{aligned} \mathbf{IC} : \mathcal{S}_c^d &\longrightarrow M_{c \times 1}(\mathbb{N}) \\ S &\longmapsto \mathbf{IC} = (IC_{\bar{k}}(S))_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_c} \end{aligned} \quad (2.44)$$

dont les composantes peuvent être définies à l'aide de la transformée de Fourier de la manière suivante :

$$IC_{\bar{k}}(S) := \mathcal{F}^{-1}\{|\mathcal{F}\{\mathbb{1}_S\}|^2\}[\bar{k}], \forall \bar{k} \in \mathbb{Z}_c \quad (2.45)$$

Définition 13. Deux échelles S et S' dans \mathcal{S}_c^d sont dites en **Z-relation** si elles partagent le même contenu intervallique.

$$S' \sim_Z S \Leftrightarrow \mathbf{IC}(S') = \mathbf{IC}(S) \quad (2.46)$$

Cette relation n'est pas triviale (chaque échelle est en Z-relation avec elle-même) que pour trois paires (fig. 2.5). On peut prouver qu'une telle particularité n'est pas possible pour des groupe cycliques \mathbb{Z}_c trop petits ($c < 4$). Le rapport de Lemke et al. (2002) décrit les conditions d'existence et fournit des bornes pour le nombre de telles configurations.

Le contenu intervallique repose sur le module de la transformation de Fourier. Il manque l'information relative aux phases qui fixe précisément la distribution spatiale des degrés de l'échelle. C'est pourquoi des échelles présentant des configuration spatiales différentes peuvent produire des contenus intervalliques identiques, pour autant que l'espace les contenant permette assez de jeu.

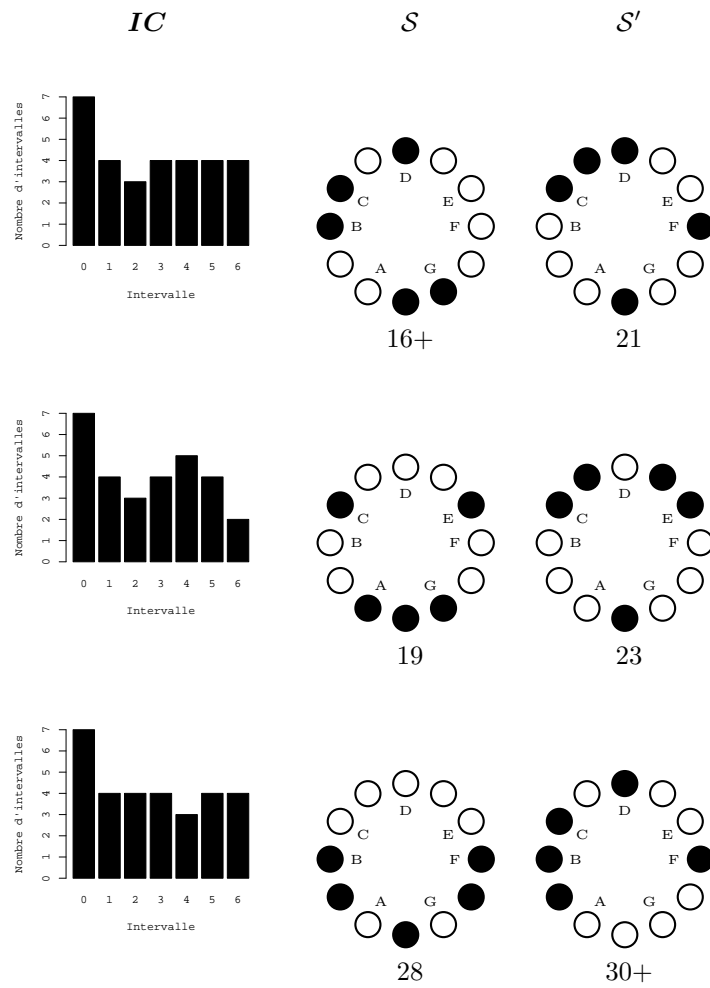


FIG. 2.5 – Les trois paires d'échelles en Z-relation.

2.7 La relation de Julio Estrada

Un autre groupe de symétrie qui vient à l'esprit est celui des permutations $Perm(\mathbb{Z}_c)$. Mais l'action du groupe entier réduirait $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_c)$ à une classe unique. On peut en revanche étudier l'action du groupe symétrique sur des grandeurs dérivées des échelles. Telle est l'approche paradigmatique de la musicologie computationnelle qui unifie sous la notion d'action de groupe des théories d'origine diverses (Andreatta, 2003). C'est dans ce cadre que les recherches du compositeur mexicain Julio Estrada sur les différentes partitions du nombre douze (Gil and Estrada, 1984) ont pu être formalisées par l'action du groupe des permutations sur le vecteur d'intervalle .

Définition 14. La *structure intervallique* d'un mode s associé à une échelle $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_c^d$ est le vecteur composé des intervalles formés par ses degrés successifs.

$$\begin{aligned} IS : \mathcal{S}_c^d &\longrightarrow M_{d \times 1}(\mathbb{Z}_c) \\ s &\longmapsto \mathbf{IS}(s) := (\chi_{\overline{k+1}} - \chi_{\overline{k}})_{\overline{k} \in \mathbb{Z}_c} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Exemple 6. Pour l'échelle $\mathcal{S}_{9+} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{11}\}$, la structure intervallique du mode $s^{(0)}$ de ré $\overline{(0)}$ est

$$\mathbf{IS}(s^{(0)}) = (1 \ 3 \ 1 \ 1 \ 3 \ 2 \ 1)^t \quad (2.48)$$

Définition 15. Deux échelles \mathcal{S} et \mathcal{S}' dans \mathcal{S}_c^d sont dites *E-équivalentes* — c'est à dire équivalentes par rapport à la relation introduite par Estrada — si la structure intervallique de l'une est un permutation de la structure intervallique de l'autre.

$$\mathcal{S}' \sim_E \mathcal{S} :\Leftrightarrow \exists \pi \in Perm(\mathbb{Z}_d) : IS_{\pi(\overline{k})}(\mathcal{S}') = IS_{\overline{k}}(\mathcal{S}), \forall \overline{k} \in \mathbb{Z}_d \quad (2.49)$$

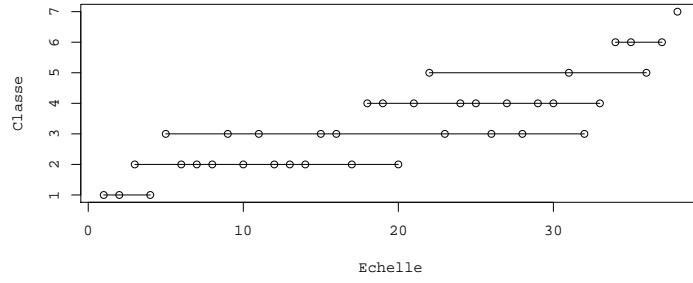
Parler d'échelles plutôt que de modes pour lesquels la structure intervallique est définie n'a de sens que parce que l'on considère toutes les permutations de IS , et donc en particulier toutes les permutations circulaires des modes. La relation ne dépend ainsi pas du mode choisi, mais uniquement de l'échelle.

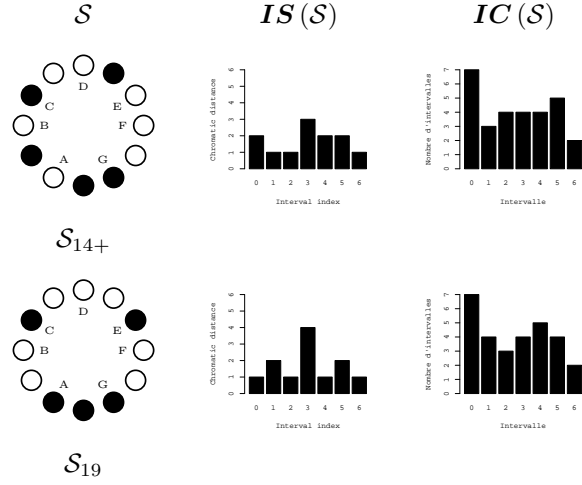
Au lieu de considérer la structure intervallique \mathbf{IS} , il est également possible de partir du contenu intervallique \mathbf{IC} au sens de Lewin, défini ci-dessous. On obtient ainsi l' E^* -équivalence, une variation autour de la relation d'Estrada.

Définition 16. Deux échelles \mathcal{S} et \mathcal{S}' dans \mathcal{S}_c^d sont dites *E*-équivalentes* si le contenu intervallique de l'une est un permutation du contenu intervallique de l'autre.

$$\mathcal{S}' \sim_{E^*} \mathcal{S} :\Leftrightarrow \exists \pi \in Perm(\mathbb{Z}_d) : IS_{\pi(\overline{k})}(\mathcal{S}') = IS_{\overline{k}}(\mathcal{S}), \forall \overline{k} \in \mathbb{Z}_d \quad (2.50)$$

Exemple 7. Les deux équivalences ne sont pas égales, comme le montrent les partitions différentes des figures 2.6 et 2.7. Ainsi par exemple $\mathcal{S}_{14+} \sim_{E^*} \mathcal{S}_{19}$ mais $\mathcal{S}_{14+} \not\sim_E \mathcal{S}_{19}$.





2.8 Dénombrements et groupes associés

Alors que le théorème de Cayley affirme que n'importe quel groupe peut être vu comme un groupe agissant sur un ensemble, le munissant d'une relation d'équivalence et donc d'une partition, le cheminement inverse est moins évident : étant donné la partition d'un ensemble, comment trouver un groupe fini et son action sur celui-ci qui engendreraient une telle partition ? La partition affine est associée à des groupes agissant directement sur \mathbb{Z}_c , et comme l'indique déjà son nom, quel sous-groupe de $Perm(\mathbb{Z}_c)$ est solution du problème. En revanche, une solution explicite est plus difficile à trouver pour les autres relations.

La relation d'Estrada \sim_E fait agir le groupe symétrique $Perm(\mathbb{Z}_d)$ sur l'ensemble des structures intervalliques, que l'on peut définir comme

$$IS := \left\{ IS \in M_{d \times 1}(\mathbb{Z}_c) \mid \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} IS_{\bar{k}} = \bar{0} \right\}. \quad (2.51)$$

Celles-ci sont invariantes par transposition. Dénombrer le nombre de classes d'équivalence induites par la relation d'Estrada \sim_E , revient à compter le nombre $\left| \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix} \right|$ de partitions de l'entier c en d blocs. On trouve chez Knuth (2005) une formule par récurrence

$$\left| \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix} \right| = \left| \begin{smallmatrix} c-1 \\ d-1 \end{smallmatrix} \right| + \left| \begin{smallmatrix} c-d \\ d \end{smallmatrix} \right| \quad (2.52)$$

dont l'initialisation est donnée par

$$\left| \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix} \right| = \begin{cases} \delta_{c,0} & d = 0 \\ 0 & c, d < 0 \end{cases}. \quad (2.53)$$

Son application au cas des échelles à sept notes livre le résultat

$$|\mathcal{S}_{12}^7/\sim_E| = \left| \begin{array}{c} 12 \\ 7 \end{array} \right| = 7 \quad (2.54)$$

que l'on peut lire dans le tableau 2.3

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\left \begin{array}{c} 12 \\ d \end{array} \right $	0	1	6	12	15	13	11	7	5	3	2	1	1

TAB. 2.3 – Nombre de partitions engendrée par la relation d'équivalence \sim_E , pour un total chromatique de $c = 12$ demi-tons et des échelles à d degrés.

La relation \sim_{E^*} ne bénéficie pas d'une formule semblable, car il n'existe à ce jour pas de formule explicite pour déterminer quels vecteurs du contenu intervallique \mathbf{IC} correspondent à des configurations (échelles) réalisables.

$$\mathcal{IC} := \left\{ \mathbf{IC} \in M_{d \times 1}(\mathbb{N}) \mid \exists \mathcal{S} \in \mathcal{S}_c^d : \mathbf{IC} = \mathbf{IC}(\mathcal{S}) \right\} \quad (2.55)$$

L'aller-retour avec perte des phases (2.44) en est la cause principale. Ce sujet est d'ailleurs apparenté aux recherches sur la Z-relation, on trouvera chez Callender and Hall (2007) une formalisation du problème à l'aide de la transformée de Fourier qui ne fait que poser le problème et n'apporte aucune réponse. En revanche, le rapport de Lemke et al. (2002) fournit des conditions d'existence et des limites à la Z-relation.

2.9 Différences et similitudes entre relations

La partition affine $\sim_{\mathbb{A}_c}$ est un affinement de la E^* -relation, c'est à dire celle engendrée par équivalence sous permutations du contenu intervallique. Une conséquence directe du fait que $M_{\bar{7}}$ est une permutation de \mathbb{Z}_{12} .

$$\mathcal{F}\{\mathbb{1}_{M_{\bar{u}}(\mathcal{S})}\}[\bar{k}] = \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}_c} \mathbb{1}_{M_{\bar{u}}(\mathcal{S})}[\bar{n}] e^{-i \frac{2\pi}{c} \bar{k} \bar{n}} \quad (2.56)$$

$$= \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}_c} \mathbb{1}_{\mathcal{S}}[\bar{u}^{-1} \bar{n}] e^{-i \frac{2\pi}{c} \bar{k} \bar{n}} \quad (2.57)$$

$$= \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}_c} \mathbb{1}_{\mathcal{S}}[\bar{u}^{-1} \bar{n}] e^{-i \frac{2\pi}{c} \bar{u} \bar{k} \bar{u}^{-1} \bar{n}} \quad (2.58)$$

$$= \mathcal{F}\{\mathbb{1}_{\mathcal{S}}\}[M_{\bar{u}}(\bar{k})] \quad (2.59)$$

Une relation similaire s'obtient pour la transformée inverse en suivant les mêmes principes. Ainsi :

$$IC_{\bar{k}}(M_{\bar{u}}(\mathcal{S})) = IC_{M_{\bar{u}^{-1}}(\bar{k})}(\mathcal{S}) \quad (2.60)$$

Deux classes de la Z -partition concordent avec la relation affine, mais une troisième interdit toute identification entre les deux : l'échelle \mathcal{S}_{28} , symétrique est Z -reliée à la paire d'échelles \mathcal{S}_{30+} et \mathcal{S}_{30-} .

Deux classes de relation par structure intervallique (Estrada) contiennent systématiquement chacune un membre de chaque paire Z -reliée (voir tab. 2.4).

Le tableau 2.5 résume le nombre de classes d'échelles et de modes chaque relation d'équivalence abordée dans ce chapitre. Le fait que d soit premier assure l'existence d'autant de modes qu'il y a de degrés dans l'échelle. C'est ainsi que l'on trouve les $492 = 7 \cdot 66$ modes représentés dans la cloche diatonique, qui fait l'objet du chapitre suivant.

$\sim_{A_{12}}$	\sim_{E^*}	\sim_Z
(1, 38)	(1, 38)	
(2, 29)	(2, 5, 29)	
(5)		
(3, 26)	(3, 6, 9, 10, 12, 13, 20, 25, 26, 27, 32, 33, 34, 35)	
(6, 27)		
(9, 31)		
(10, 35)		
(12)		
(13, 32)		
(20, 33)		
(25, 34)		
(4)	(4)	
(7)	(7)	
(8)	(8, 15)	
(15)		
(11)	(11)	
(14, 36)	(14, 19, 23, 36)	
(19, 23)		(19, 23)
(16, 21)	(16, 21, 28, 30)	(16, 21)
(28)		(28, 30)
(30)		
(17, 37)	(17, 37)	
(18)	(18)	
(22)	(22)	
(24)	(24)	
	\sim_E	
	(1, 2, 4)	
	(3, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 17, 20)	
	(5, 9, 11, 15, 16, 23, 26, 28, 32)	
	(18, 19, 21, 24, 25, 27, 29, 30, 33)	
	(22, 31, 36)	
	(34, 35, 37)	
	(38)	

TAB. 2.4 – Partition de $\mathcal{S}_{12}^7/\mathbb{D}_{12}$ créées par les relations d'équivalence affine $\sim_{A_{12}}$, par permutation des composantes du vecteur de contenu intervallique \sim_{E^*} , par Z-relation \sim_Z (les classes triviales ne sont pas énumérées) et par permutation des composantes du vecteur de la structure structure intervallique \sim_E .

\sim	$ \mathcal{S}_c^d/\sim $	$d \cdot \mathcal{S}_c^d/\sim $
—	792	5544
$\sim_{\mathbb{Z}_{12}}$	66	492
$\sim_{\mathbb{D}_{12}}$	38	266
$\sim_{\mathbb{A}_{12}}$	25	175
\sim_Z	35	245
\sim_E	13	91
\sim_{E^*}	7	49

TAB. 2.5 – Nombre de classes d'échelles et de modes à 7 notes pris dans un total chromatique à 12 demi-tons, pour chaque relation d'équivalence.

Chapitre 3

La cloche diatonique de Pierre Audétat

Les techniques d'énumération fournissent un chiffre unique, en l'occurrence 492 modes à une transposition près. Les choses se compliquent dès que l'on s'intéresse à chaque mode pris individuellement. Par lequel commencer ? Par lequel continuer ? Comment les passer en revue systématiquement ? L'exploration des modes peut se trouver grandement facilitée par un outil d'orientation comme la cloche diatonique¹.

De même que la set theory diatonique de la tradition américaine se préoccupe de savoir quelles sont les implications chromatiques des structures diatoniques, la cloche fait cohabiter ces deux mondes : elle est une représentation *diatonique* dans le sens qu'elle repose sur les deux principes de symétrie du ré et de mesure de distance entre notes par pas de quintes, et que ceci a des répercussions dans le cercle *chromatique* sous forme d'altérations comptées par pas de demi-tons. L'enharmoine est absente du monde diatonique, dans lequel le *cycle* des quintes devrait plutôt s'appeler *hélice*, puisque l'axe des entiers \mathbb{Z} ne se replie pas sur lui-même pour former le groupe cyclique \mathbb{Z}_{12} , que l'on associe communément au monde chromatique. Un la bémol (-6) ne sera pas identifié avec un sol dièse, mais vaudra exactement son opposé (+6).

Toutes les échelles possibles sont vues avec un regard diatonique, dans le sens où chacune est construite comme une altération de cette dernière. Il n'est pas nécessaire d'aller au delà des doubles-dièses ou bémols pour obtenir les échelles les plus éloignées comme l'échelle chromatique, ce qui règle le problème de l'enharmoine du cercle chromatique : six dièses ou six bémols produisent la même note située à la distance d'un triton. Lesquels choisir ?

La cloche est constituée de représentants bien précis de chaque classe de $\mathcal{S}_{12}^7/\mathbb{Z}_{12}$. Ceux-ci doivent satisfaire deux critères imposant à la distribution des

¹Seule une brève introduction de son fonctionnement sera faite ici. Les personnes intéressées par une compréhension plus approfondie des possibilités offertes sont invitées à consulter la documentation du CdL-HEM que l'on trouvera sur le site de la cloche.

notes autour du ré d'être à la fois centrée et la plus compacte possible. On verra qu'un tel représentant existe toujours, est unique, et peut être retrouvé facilement à partir de n'importe quel membre de sa classe.

3.1 Clefs de lecture

La figure 3.1 présente les 492 modes des 66 classes de transposition d'échelles à sept notes du total chromatique de douze notes. Chaque colonne est numérotée par un indice i et représente une classe de $\mathcal{S}_{12}^7/\mathbb{D}_{12}$. Elle contient soit une unique échelle \mathcal{S}_i palindromique (symétrique), soit une paire d'échelles \mathcal{S}_{i+} et \mathcal{S}_{i-} inverses l'une de l'autre. Cet indice i correspond au rang que la classe occupe en terme d'étalement de la distribution de ses notes. Cela va de la plus compacte, l'échelle diatonique ($i = 1$), à la plus étendue, l'échelle chromatique ($i = 38$). Les degrés χ qu'elles contiennent sont symbolisés par les cellules de couleur, qui correspondent chacune au mode dont elles sont la fondamentale

$$s(0) = \chi \quad (3.1)$$

Le rouge indique un palindrome, ou position symétrique par inversion I_0

$$\chi \in I_0(\mathcal{S}) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset \quad (3.2)$$

et le bleu un degré asymétrique

$$\chi \in \mathcal{S} \setminus I_0(\mathcal{S}) \neq \emptyset. \quad (3.3)$$

Le boulet sert à distinguer entre les deux membres de la classe diédrale. L'origine de l'axe vertical est un ré, ses unités marquent la distance en quintes par rapport à cette référence choisie pour sa position symétrique. Il existe alors deux lectures duales de la valeur de la ligne horizontale sur laquelle se situe une cellule. Interprétée comme une note (légendes jaunes), elle en indique la note diatonique de référence et son altération : des valeurs positives pour les dièses, négatives pour les bémols. Lue comme un mode (légendes grises), les valeurs exactement opposées à celles des notes indiquent sa couleur (généralisation du caractère majeur/mineur) : claire dans les positifs, sombre dans les négatifs.

3.2 Symétrie du ré et hélice des quintes

La position symétrique du ré apparaît systématiquement dans le cycle des quintes et la disposition des touches noires et blanches du clavier du piano (figure 3.2) qui n'est rien d'autre qu'un cercle chromatique déroulé. L'autre point fixe de la symétrie, le sol dièse/la bémol occupe la même situation privilégiée dans le complément pentatonique.

Cette particularité fait du ré un candidat de choix pour y fixer l'origine de l'axe vertical de la cloche. Tout comme en *set theory*, il s'agit d'une classe, et non d'une note particulière, l'équivalence par octave ayant évacué la notion

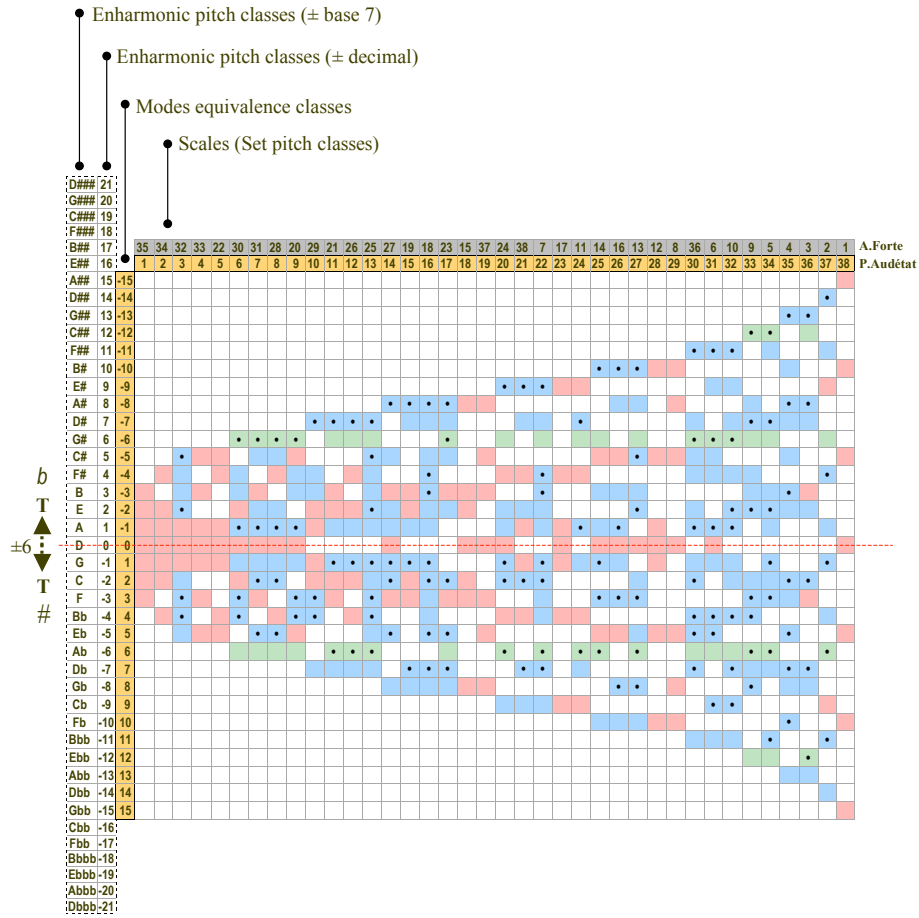


FIG. 3.1 – Reproduction de la cloche diatonique, d'après Audétat (2006). ©2007 Pierre Audétat, CdL—HEM.

de registre. L'envergure totale de $2 \cdot 15 \cdot 7 + 1 = 211$ demi-tons ne tiendrait pas plus sur un clavier standard à quatre-vingt-huit touches que dans l'étendue prévue des hauteurs MIDI (0 à 127). Même en choisissant le ré moyen (D3 aux Etats-unis, 63 en MIDI), elle nécessiterait des codes allant de -13 à 167 !

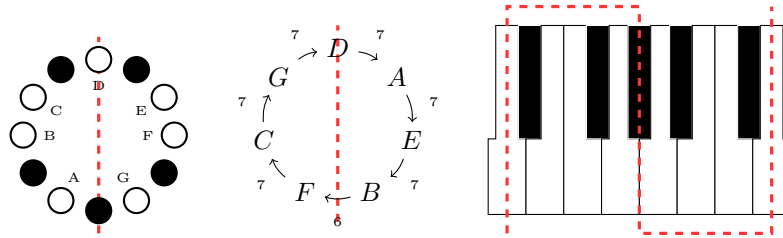


FIG. 3.2 – La triple symétrie du ré (et de son pendant le sol dièse/la bémol) : dans le cercle chromatique, le cycle des quintes et le clavier du piano.

L'apparition de dièses et de bémols est due au fait que le cercle des quintes ne se referme pas sur lui-même entre si et fa autrement que par une quinte diminuée.

$$7 \cdot 7 = 49 \equiv 1 \pmod{12} \quad (3.4)$$

En continuant d'avancer par quintes, on altère les notes d'une unité chromatique vers le haut tous les sept pas. C'est ainsi que l'on rajoute un dièse chaque fois que l'on parcourt l'équivalent d'une échelle entière. Inversement, descendre par quintes conduit à ajouter des bémols.

3.3 Construction des représentants

Le catalogue de Forte (1973) se sert des *prime forms* comme représentants de chaque classe d'action du groupe diédral \mathbb{D}_{12} . Il s'agit du premier membre de la classe dans l'ordre lexicographique des ensembles de classes de hauteurs (ECH).

Les représentants des classes de transposition composant la cloche sont construits sur d'autres principes, à savoir ceux d'une distribution des degrés ou modes centrée et compacte. Ceci requiert une formalisation du processus d'altération, dont les définitions sont exposées ci-dessous.

L'idée est de suivre le solfège, et de porter un regard diatonique sur toutes les échelles. C'est à dire que chaque échelle \mathcal{S}' est conçue comme une altération d'une unique échelle de référence, la diatonique \mathcal{S} , choisie parce qu'elle est monogène, c'est à dire engendrée par le cycle des quintes. Chaque degré $\chi' \in \mathcal{S}'$ se trouve ainsi associé au degré $\chi \in \mathcal{S}$ correspondant, l'*altération* étant la mesure de leur différence.

Deux problèmes apparaissent dès lors. Les associations entre degrés d'échelle correspondant chacune à une permutation π de $\text{Perm}(\mathbb{Z}_d)$, laquelle choisir parmi les $d!$ envisageables ? Et comment mesurer la différence entre deux degrés ?

Tant la distance absolue qui fixe le nombre d'altérations que la direction qui fixe le type, dièse ou bémol, est nécessaire. Les définitions suivantes serviront à préciser les choix nécessaires à une procédure univoque et bien définie de construction de la cloche diatonique.

3.3.1 Altérations chromatiques

Les altérations fournissent une mesure *chromatique*, d'éloignement en demi-tons des degrés chromatiques de l'échelle diatonique. L'extrême est atteint par l'échelle chromatique. Elle ne suffit pourtant pas à définir une mesure du caractère diatonique ou chromatique d'une échelle, comme le montre la section 4.

Définition 17. La *différence chromatique* a entre les degrés χ' et χ compte le nombre de pas de demi-tons nécessaires pour obtenir χ' à partir de χ .

$$\begin{aligned} a : \mathbb{Z}_c \times \mathbb{Z}_c &\longrightarrow \mathbb{Z}_c \\ (\bar{n}, \bar{n}') &\longmapsto a(\bar{n}, \bar{n}') = \bar{n}' - \bar{n} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Le *vecteur d'altérations chromatiques* \mathbf{a}_s du mode s' par rapport au mode s , moyennant l'association π entre degrés est composé des altérations de chaque degré.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_s : \mathcal{M} \times \text{Perm}(\mathbb{Z}_d) &\longrightarrow M_{d \times 1}(\mathbb{Z}_c) \\ (s, \pi) &\longmapsto (a_{\bar{k}})_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} := \left(a \left(\chi_{\bar{k}}, \chi'_{\pi(\bar{k})} \right) \right)_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} \end{aligned} \quad (3.6)$$

L'*espace des altérations chromatiques* relatifs au mode s est l'ensemble de tous les vecteurs d'altérations pour lesquels existe un mode s' et une assignation entre degrés π .

$$\mathcal{A} := \left\{ \tilde{\mathbf{a}} \in M_{d \times 1}(\mathbb{Z}_c) \mid \exists s' \mathcal{M}, \pi \in \text{Perm}(\mathbb{Z}_d) : \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(s', \pi) \right\} \quad (3.7)$$

Ces différences entre degrés doivent encore être traduites en termes de direction (dièse ou bémol) et de distance (nombre d'altérations).

Définition 18. La *distance chromatique* $d_{\mathbb{Z}_c}$ entre deux points \bar{n} et \bar{n}' du cercle \mathbb{Z}_c de longueur c , est définie comme la norme dans \mathbb{Z} de l'élément minimal de la classe de leur différence.

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{Z}_c} : \mathbb{Z}_c \times \mathbb{Z}_c &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (\bar{n}, \bar{n}') &\longmapsto d_{\mathbb{Z}_c}(\bar{n}, \bar{n}') := \operatorname{argmin}_{\bar{k} \in \bar{n}, \bar{k}' \in \bar{n}'} |k' - k|_{\mathbb{Z}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Exemple 8. Cette distance exprime la longueur du chemin le plus court, dans le sens des aiguilles du montre ou le contraire si nécessaire.

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{Z}_{12}}(\bar{10}, \bar{2}) &= 4 \\ d_{\mathbb{Z}_{12}}(\bar{3}, \bar{2}) &= 1 \end{aligned}$$

Définition 19. La *direction chromatique* $\text{sgn}_{\mathbb{Z}_c}$ entre deux points \bar{n} et \bar{n}' du cercle \mathbb{Z}_c est définie comme le signe de leur différence.

$$\begin{aligned} \text{sgn}_{\mathbb{Z}_c} : \mathbb{Z}_c \times \mathbb{Z}_c &\longrightarrow \{-1, +1\} \\ (\bar{n}, \bar{n}') &\longmapsto \text{sgn}_{\mathbb{Z}_c}(\bar{n}, \bar{n}') := \begin{cases} +1 & \bar{n} \in \{\bar{0}, \dots, \lfloor \frac{c}{2} \rfloor - 1\} \\ -1 & \bar{n}' \in \{\lfloor \frac{c}{2} \rfloor, \dots, c-1\} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Exemple 9. Le cercle chromatique se trouve ainsi divisé en deux moitiés égales si c est pair, ce qui est le cas pour $c = 12$. La première région, positive, est associée aux dièses, la seconde, négative, aux bémols.

$$\text{sgn}_{\mathbb{Z}_{12}}(\bar{0}, \bar{1}) = +1 \quad (\#)$$

$$\text{sgn}_{\mathbb{Z}_{12}}(\bar{5}, \bar{3}) = -1 \quad (b)$$

Deux points posent problème : l'unisson et le triton, pour lesquels une valeur de signe n'est pas clairement définie. Tant que l'on reste dans l'arithmétique modulaire, la question ne se pose pas, on la contourne par la convention suivante : l'élément $\bar{0}$ se voit ranger parmi les dièses, $\bar{6}$ parmi les bémols.

$$\begin{aligned} -0 &\equiv +0 \pmod{12} \\ -6 &\equiv +6 \pmod{12} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Le signe de $\bar{0}$ est sans importance, car toujours associé à une distance nulle. On verra que les altérations nécessaires ne dépassent jamais une distance de 2, ce qui les maintient à l'écart du triton.

La relation entre différence, distance et direction chromatiques peut se résumer par

$$\boxed{\chi' - \chi = \text{sgn}_{\mathbb{Z}_c}(\chi, \chi') \cdot d_{\mathbb{Z}_c}(\chi, \chi') + c\mathbb{Z}}. \quad (3.11)$$

Une fois le mode de référence s fixé, le vecteur d'altérations \mathbf{a}' détermine le mode s' de manière unique, et inversement, pour autant qu'on se tienne à distance de l'enharmonicité ($|a'_{\bar{k}}| < \lceil \frac{c}{2} \rceil$).

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_d &\longrightarrow \mathbb{Z}_c \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}_c \\ \bar{k} &\longmapsto (\chi_{\bar{k}}, a'_{\bar{k}}) &\longmapsto \chi_{\bar{k}} + a'_{\bar{k}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Une distance induit automatiquement une norme si on compare chaque élément à l'élément neutre. C'est ainsi qu'on pourra parler de la distance et du signe d'un élément isolé.

$$d_{\mathbb{Z}_c}(\bar{n}) := d_{\mathbb{Z}_c}(\bar{0}, \bar{n}) \quad (3.13)$$

$$\text{sgn}_{\mathbb{Z}_c}(\bar{n}) := \text{sgn}_{\mathbb{Z}_c}(\bar{0}, \bar{n}) \quad (3.14)$$

3.3.2 Degrés diatoniques

Une représentation parallèle à la paire chromatique (χ, a) est le degré diatonique unique δ par lequel est désigné le degré d'une échelle dans la cloche. La perte d'information qui pourrait résulter d'une telle réduction de dimensions est évitée par la juxtaposition des cycles de longueur d , comme si l'on faisait rouler \mathbb{Z}_d le long de \mathbb{Z} . L'orientation de la roue serait alors donnée par χ et le nombre de tours par a .

Définition 20. *Le degré diatonique $\delta' \in \mathbb{Z}$ de la paire chromatique (χ, a') reflète à la fois le degré chromatique χ original de l'échelle diatonique et son d'altération a .*

$$\delta' := d^{-1} \cdot \text{sgn}_{\mathbb{Z}_c}(\chi') \cdot d_{\mathbb{Z}_c}(\chi') + d \cdot \text{sgn}_{\mathbb{Z}_c}(a') \cdot d_{\mathbb{Z}_c}(a') \quad (3.15)$$

Le vecteur des degrés diatoniques δ' du mode s' de l'échelle S' est le vecteur composé des degrés diatoniques.

$$\begin{aligned} \delta : \mathcal{M} &\longrightarrow M_{d \times 1}(\mathbb{Z}) \\ s &\longmapsto (\delta'_{\bar{k}})_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} \end{aligned} \quad (3.16)$$

où $\delta'_{\bar{k}} = \delta'(\chi'_{\bar{k}}, a'_{\bar{k}})$ pour chaque degré $\bar{k} \in \mathbb{Z}_d$, selon (3.15).

Exemple 10. *L'échelle diatonique \mathcal{S}_1 ne comporte aucune altération. Les équations (3.15) permettent de calculer le degré diatonique de chaque note de cette échelle.*

\bar{k}	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\chi_{\bar{k}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$
$\bar{d} \cdot \chi_{\bar{k}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{11}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{10}$
$d_{\mathbb{Z}_c}(\bar{d} \cdot \chi_{\bar{k}})$	0	2	3	1	1	3	2
$\text{sgn}_{\mathbb{Z}_c}(\bar{d} \cdot \chi_{\bar{k}})$	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1
$\delta_{\bar{k}}$	0	+2	-3	-1	+1	+3	-2

On vérifie bien que la somme des degrés diatoniques est nulle.

L'espace des degrés diatoniques \mathcal{D} est l'ensemble des vecteurs diatoniques pour lesquels il existe un mode s' et une assignation de degrés π .

$$\mathcal{D} := \left\{ \tilde{\delta} \in M_{d \times 1}(\mathbb{Z}) \mid \tilde{\delta} = \delta(s, \mathbf{a}(s', \pi)) \right\} \quad (3.17)$$

Le mode dorien (symétrique) $s^{(0)}$ de l'échelle diatonique sera sous-entendu comme mode de référence. Il occupe les degrés du centre de la cloche : première échelle, mode zéro. Un degré diatonique définit de manière univoque une paire chromatique et vice-versa. Les transformations inverses de (3.15) sont les suivantes :

$$\chi = d_{\mathbb{Z}_d}(\bar{\delta}') + \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + c \cdot \mathbb{Z} \quad (3.18)$$

$$a' = \lfloor \frac{\delta' + \lfloor \frac{d}{2} \rfloor}{d} \rfloor \quad (3.19)$$

Le couple (χ, a') correspond au résultat d'une division entière par $d : a$ en est le dividende, χ le reste. La correspondance entre (χ, a') et δ' est biunivoque.

3.3.3 Distributions centrées

La distribution des degrés d'une échelle est considérée comme centrée si la somme des altérations est nulle. Autrement dit, si l'on compte autant de dièses que de bémols.

Définition 21. *Le nombre scalaire d'altérations A nécessaires pour obtenir l'échelle \mathcal{S}' à partir de l'échelle \mathcal{S} est le nombre total modulo c d'altérations entre paires de leurs degrés :*

$$\begin{aligned} A : \mathcal{S}_c^d \times \mathcal{S}_c^d &\longrightarrow \mathbb{Z}_c \\ (\mathcal{S}, \mathcal{S}') &\longmapsto A(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} (\chi'_{\bar{k}} - \chi_{\bar{k}}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Elle ne dépend pas d'une association particulière entre degrés des deux échelles, ce qui garantit qu'elle est bien définie, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 1. *Pour deux échelles \mathcal{S} et \mathcal{S}' de \mathcal{S}_c^d , le nombre scalaire d'altérations A ne dépend ni du choix des modes s de \mathcal{S} et s' de \mathcal{S}' , ni de la permutation $\pi \in \text{Perm}(\mathbb{Z}_d)$ associant leurs degrés.*

Démonstration.

$$\forall \pi \in \text{Perm}(\mathbb{Z}_d), \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} a(\chi_{\bar{k}}, \chi'_{\pi(\bar{k})}) \quad (3.21)$$

$$= \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} (\chi'_{\pi(\bar{k})} - \chi_{\bar{k}}) \quad (3.22)$$

$$= \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} \chi'_{\pi(\bar{k})} - \sum_{k=0}^{d-1} \chi_{\bar{k}} \quad \text{par associativité} \quad (3.23)$$

$$= \left(\sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} \chi'_{\pi(\bar{k})} \right) - \left(\sum_{k=0}^{d-1} \chi_{\bar{k}} \right) \quad (3.24)$$

$$= \left(\sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} \chi'_{\bar{k}} \right) - \left(\sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} \chi_{\bar{k}} \right) \quad \text{par sommation sur un indice muet} \quad (3.25)$$

$$= \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} (\chi'_{\bar{k}} - \chi_{\bar{k}}) \quad \text{par associativité} \quad (3.26)$$

□

Pour autant que c et d soient premiers entre eux, le nombre scalaire d'altérations $A(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ parcourt l'entier du groupe cyclique \mathbb{Z}_c sous l'action du groupe des transpositions. Autrement dit, chaque membre de la classe de transposition présente un nombre d'altérations différents, et l'orbite couvre toutes les valeurs possibles.

Lemme 2. *Si le cardinal d des échelles et c du total chromatique sont premiers entre eux, alors quelles que soient les échelles $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \mathcal{S}_c^d$ choisies, l'image de A parcourt l'ensemble de son co-domaine, sous l'action du groupe des transpositions.*

$$\left\{ A(\mathcal{S}, T_{\bar{b}}(\mathcal{S}')) \mid \bar{b} \in \mathbb{Z}_c \right\} \cong \mathbb{Z}_c \quad (3.27)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} a(\mathcal{S}, T_{\bar{b}}(\mathcal{S}')) &= \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} a(\chi_{\bar{k}}, T_{\bar{b}}(\chi'_{\bar{k}})) \\ &= \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} (T_{\bar{b}}(\chi'_{\bar{k}}) - \chi_{\bar{k}}) \\ &= \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} ((\chi'_{\bar{k}} + \bar{b}) - \chi_{\bar{k}}) \\ &= \bar{d} \cdot \bar{b} + \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} (\chi'_{\bar{k}} - \chi_{\bar{k}}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

□

Corollaire 1. *Si $\langle d, c \rangle = 1$, il existe une unique transposition $T_{\bar{b}}$ qui centre \mathcal{S}' sur \mathcal{S} .*

$$\langle c, d \rangle = 1 \Rightarrow \exists! n \in \mathbb{Z}_c : A(\mathcal{S}, T_{\bar{b}}(\mathcal{S}')) = 0 \quad \forall \mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \quad (3.29)$$

Les gammes heptatoniques ($\langle 7, 12 \rangle = 1$) satisfont les conditions pour trouver un membre centré dans chaque classe de transposition d'échelle χ .

Lemme 3. *L'échelle \mathcal{S}' de cardinal d impair est centrée dans sa représentation diatonique ssi ses altérations chromatiques sont équilibrées.*

$$\sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} \delta'_{\bar{k}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} a'_{\bar{k}} = \bar{0} \quad (3.30)$$

Démonstration. Ceci est une conséquence des relations entre altérations chromatiques et degrés diatoniques (3.15) et (3.18).

$$1. \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} \delta'_k = 0 \Rightarrow \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} a'_k = \bar{0}.$$

$$\sum_{\bar{k}} \delta'_k = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} \lfloor \frac{\delta'_k + \lfloor \frac{d}{2} \rfloor}{d_{\bar{k}}} \rfloor \quad (3.31)$$

$$= \lfloor \frac{-\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + \lfloor \frac{d}{2} \rfloor}{d} \rfloor + \lfloor \frac{-\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1 + \lfloor \frac{d}{2} \rfloor}{d} \rfloor + \dots \quad (3.32)$$

$$+ \lfloor \frac{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1 + \lfloor \frac{d}{2} \rfloor}{d} \rfloor + \lfloor \frac{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + \lfloor \frac{d}{2} \rfloor}{d} \rfloor \quad (3.33)$$

$$= 0 + 0 + \dots + 0 + 0 \quad d \text{ est impair} \quad (3.34)$$

$$= 0 \quad (3.35)$$

Or, d'après (3.15),

$$\sum_{\bar{k}} \delta'_k = \sum_{\bar{k}} \delta_{\bar{k}} \sum_{\bar{k}} \text{sgn}_{\mathbb{Z}_c}(a'_{\bar{k}}) \cdot d_{\mathbb{Z}_c}(a'_{\bar{k}}) = 0 + 0 = 0. \quad (3.36)$$

$$2. \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} a'_k = \bar{0} \Rightarrow \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} \delta'_k = 0.$$

$$\Rightarrow \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} \delta'_k = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} (\delta_{\bar{k}} + \text{sgn}_{\mathbb{Z}_d}(a'_{\bar{k}}) \cdot d_{\mathbb{Z}_d}(a'_{\bar{k}})) \quad (3.37)$$

$$= \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} \delta_{\bar{k}} + \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} \text{sgn}_{\mathbb{Z}_d}(a'_{\bar{k}}) \cdot d_{\mathbb{Z}_d}(a'_{\bar{k}}) \quad (3.38)$$

$$= \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} \delta_{\bar{k}} + 0 \quad \text{par hypothèse} \quad (3.39)$$

$$= 0 \quad (3.40)$$

□

3.3.4 Distributions compactes

Avec le centrage de l'échelle \mathcal{S}' autour de l'axe de ré, nous n'avons réalisé que la première étape de la construction. Il reste à trouver lequel des d modes s' et laquelle des $d!$ associations π entre degrés de \mathcal{S} et de \mathcal{S}' donne lieu au vecteur diatonique le plus compact.

Notons d'abord que $\text{Perm}(\mathbb{Z}_d)$ contient les d permutations circulaires chacune correspondant à un mode différent, et que choisir de manière arbitraire un seul mode s' suffit, pour autant que nous passions en revue toutes les $d!$ associations possibles.

Il reste ensuite à définir une relation d'ordre sur l'ensemble des vecteurs d'altération \mathcal{A} comme de degrés diatoniques \mathcal{D} , qui permette de décider quel vecteur est *inférieur* à quel autre, de sorte à pouvoir engager un processus de minimisation dans les deux espaces, chromatique et diatonique, et vérifier que ces minimums obtenus séparément correspondent bien.

La relation d'ordre entre vecteurs est définie de la même manière pour les deux espaces. L'idée est d'éviter d'abord les altérations multiples (double-dièses, triple-bémols) puis de limiter le nombre d'altérations inférieures jusqu'au cas du simple dièse ou bémol.

Définition 22. La comparaison entre deux vecteurs $\mathbf{x} = (x_{\bar{k}})_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_n}$ et $\mathbf{x}' = (x'_{\bar{k}})_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d}$ d'un même espace $M_{d \times 1}(\mathbb{Z})$ se déroule suivant les étapes suivantes :

1. Prendre la valeur absolue de chaque composante $x_{\bar{k}} \mapsto |x_{\bar{k}}|$ et $x'_{\bar{k}}$.

$$|a_{\bar{k}}| := d_{\mathbb{Z}_c}(a_{\bar{k}}) \tag{3.41}$$

$$|\delta_{\bar{k}}| := d_{\mathbb{Z}}(a_{\bar{k}}) \tag{3.42}$$

2. Ranger les composantes par ordre décroissant

$$\tilde{\mathbf{x}} := (|x|_{o(\bar{0})}, \dots, |x|_{o(\bar{d-1})}) \tag{3.43}$$

où o est la permutation rangeant les composantes par ordre décroissant

$$|x|_{o(\bar{k})} > |x|_{o(\bar{k+1})}, \forall k \in 0, \dots, d-2 \tag{3.44}$$

3. Comparer lexicographiquement les deux vecteurs ainsi obtenus.

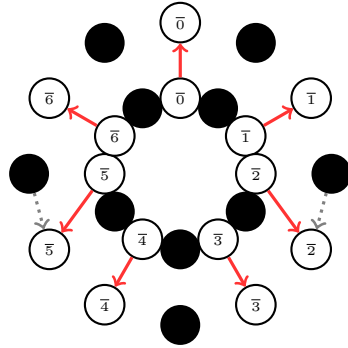


FIG. 3.3 – Association π (flèches aux traits pleins) entre degrés des échelle diatonique \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 . Les deux altérations chromatiques sont figurées par des flèches en pointillé.

Bien que construites selon la même procédure, les relations d'ordre dans l'espace diatonique \mathcal{D} n'en impliquent pas forcément dans l'espace chromatique des altérations \mathcal{A} et vice-versa, surtout s'ils sont associés à des échelles différentes. De plus, Les degrés diatoniques distinguent plus finement les altérations que ne le fait le vecteur d'altérations chromatiques, pour lequel dièses et bémols ont le même poids quelle que soit a note à laquelle ils sont rattachés. Ceci n'est pas vrai dans le monde diatonique : un si bémol est plus proche du ré qu'un si dièse, et un fa dièse qu'un fa bémol. Les altérations des armatures habituelles sont ainsi privilégiées.

Exemple 11. Quelques contre-exemples pour illustrer qu'une relation d'ordre dans un espace n'est pas forcément réalisée dans l'autre.

1. Pour les deux échelles différentes $\mathcal{S}_2 \neq \mathcal{S}_3$,

$$\delta(\mathcal{S}_2) < \delta(\mathcal{S}_3) \not\Rightarrow \mathbf{a}(\mathcal{S}_2) < \mathbf{a}(\mathcal{S}_3) \quad (3.45)$$

En effet, des degrés diatoniques différentes peuvent correspondre à un jeu d'altérations de même ordre.

$$\begin{array}{c} (S', s') \\ (\mathcal{S}_2, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{4} \\ \bar{5} \\ \bar{7} \\ \bar{8} \\ \bar{10} \end{pmatrix}) \\ (\mathcal{S}_3, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{4} \\ \bar{5} \\ \bar{7} \\ \bar{9} \\ \bar{10} \end{pmatrix}) \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi' \\ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{6} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{6} \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} (\delta_k^L)_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} \\ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} (a_k^L)_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} \\ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{-1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{-1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \end{array}$$

2. La réciproque n'est pas vraie non plus. Pour deux échelles différentes $\mathcal{S}_5 \neq \mathcal{S}_{6+}$,

$$\mathbf{a}(\mathcal{S}_5) < \mathbf{a}(\mathcal{S}_{6+}) \not\Rightarrow \delta(\mathcal{S}_5) < \delta(\mathcal{S}_{6+}) \quad (3.46)$$

En effet, des degrés diatoniques peuvent présenter un ordre inverse de celui des altérations.

$$\begin{array}{c} (S', s') \\ (\mathcal{S}_5, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{4} \\ \bar{5} \\ \bar{7} \\ \bar{8} \\ \bar{11} \end{pmatrix}) \\ (\mathcal{S}_{6+}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{4} \\ \bar{5} \\ \bar{6} \\ \bar{9} \\ \bar{10} \end{pmatrix}) \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi' \\ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{6} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{6} \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} (\delta_k^L)_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d^t} \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^t \end{array} \quad \begin{array}{c} (a_k^L)_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d^t} \\ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{-1} \\ \bar{-1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{-1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}^t \end{array}$$

3. A échelle \mathcal{S}_{37} égale, un élargissement de la distribution diatonique ne correspond pas forcément à des altérations chromatiques supplémentaires.

$$\delta(\mathcal{S}_{37}) < \delta'(\mathcal{S}_{37}) \not\Rightarrow \mathbf{a}(\mathcal{S}_{37}) < \mathbf{a}'(\mathcal{S}_{37}) \quad (3.47)$$

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{S}', s') & \pi' & \begin{array}{l} (\delta'_{\bar{k}})_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} \\ (a'_{\bar{k}})_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_d} \end{array} \\ \begin{array}{l} (\mathcal{S}_{37+}, \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{5} \\ \bar{6} \\ \bar{7} \\ \bar{8} \\ \bar{9} \\ \bar{10} \end{pmatrix}) \\ (\mathcal{S}_{37+}, \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{5} \\ \bar{6} \\ \bar{7} \\ \bar{8} \\ \bar{9} \\ \bar{10} \end{pmatrix}) \end{array} & \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{6} \\ \bar{4} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{6} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ -1 \\ -28 \\ 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}^t \\ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ -21 \\ 1 \\ 30 \\ -4 \end{pmatrix}^t \end{array} \\ & & \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ -\bar{4} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ -\bar{3} \\ \bar{0} \\ \bar{4} \\ -\bar{1} \end{pmatrix}^t \end{array} \end{array}$$

En revanche, à échelle égale, l'ajout d'altérations contribue forcément à un étalement de la distribution diatonique.

Lemme 4. Soient une échelle $\mathcal{S}' \in \mathcal{S}_c^d$ de cardinalité d impaire, son mode s' et deux permutations $\pi, \tilde{\pi} \in \text{Perm}(\mathbb{Z}_d)$ produisant une infériorité stricte dans l'espace des altérations chromatiques. Alors il leur correspond forcément une infériorité stricte dans l'espace des degrés diatoniques.

$$\mathbf{a}(s', \pi) < \mathbf{a}(s', \tilde{\pi}) \implies \delta(s', \pi) < \delta(s', \tilde{\pi}) \quad (3.48)$$

Démonstration. Si $\mathbf{a} := \mathbf{a}(s', \pi) < \tilde{\mathbf{a}} := \mathbf{a}(s', \tilde{\pi})$ alors il existe une degré \bar{k} agissant sur l'ordre lexicographique pour lequel vaut l'inégalité suivante :

$$d_{\mathbb{Z}_c}(a_{\bar{k}}) < d_{\mathbb{Z}_c}(\tilde{a}_{\bar{k}}) \quad (3.49)$$

Il est clair que l'ajout d'une altération de même signe à un degré déjà altéré fera bondir le degré diatonique correspondant de d . Le cas des degrés pas encore altérés demande un traitement plus soigneux. Il faut vérifier que l'ajout d'un dièses au degré le plus négatif (p. ex. fa), ou d'un bémol au degré le plus positif (p. ex. si) fera sortir le degré de l'étendue diatonique des notes non altérées. Ceci arrive uniquement pour une cardinalité impaire : $d = 2n + 1$. Prenons le

cas de l'altération positive (l'ajout d'un bémol se traite de façon symétrique).

$$\begin{aligned}
-\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + d &= -\lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor + 2n+1 \\
&= -\lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor + 2n+1 \\
&= -\lfloor n + \frac{1}{2} \rfloor + 2n+1 \\
&= -n + 2n+1 \\
&= n+1 \\
&> n \\
&= \lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor \\
&= \lfloor \frac{d}{2} \rfloor
\end{aligned} \tag{3.50}$$

□

La figure 3.4 montre la complexité des relations d'ordre entre degrés diatoniques et altérations chromatiques. Celle-ci disparaît dès lors que l'on se concentre sur leur infimum. C'est également ce cas qui nous intéresse pour construire le représentant δ^* de la classe d'échelles.

Définition 23. Soient deux échelles $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \mathcal{S}_c^d$ centrées $A(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = 0$, et leurs modes s respectivement s' . L'**association minimale** π^* entre leurs degrés correspond à la permutation qui donne lieu à un vecteur de degrés diatoniques minimal.

$$\pi^* := \operatorname{argmin}_{\pi \in \operatorname{Perm}(\mathbb{Z}_d)} \delta(s, s' \pi) \tag{3.51}$$

Une seule permutation permet d'atteindre le minimum. L'association optimale est donc bien définie dans le cas $d = 7$, $c = 12$.

Lemme 5. Soient deux échelles $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \mathcal{S}_{12}^7$ leurs modes s et s' . Le vecteur de degrés diatoniques défini par l'association minimale est unique.

$$\delta(s, s', \pi^*) < \delta(s, s', \pi), \quad \forall \pi \in \operatorname{Perm}(\mathbb{Z}_d) \setminus \pi^* \tag{3.52}$$

Démonstration. Par vérification empirique sur les 5040 permutations (voir les tableaux A.1 à A.1). Le vecteur de degrés diatoniques minimal est effectivement unique, une seule permutation permet de l'atteindre. □

Choisir les degrés diatoniques les plus resserrés garantit un minimum d'altérations. La définition (3.51) aurait tout aussi bien pu reposer sur les vecteurs d'altérations.

Lemme 6. Soient deux échelles $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \mathcal{S}_{12}^7$ leurs modes s et s' . L'association minimale est associée au vecteur d'altérations minimal.

$$\mathbf{a}(s, s', \pi^*) = \min_{\pi \in \operatorname{Perm}(\mathbb{Z}_d)} \mathbf{a}(s, s', \pi) \tag{3.53}$$

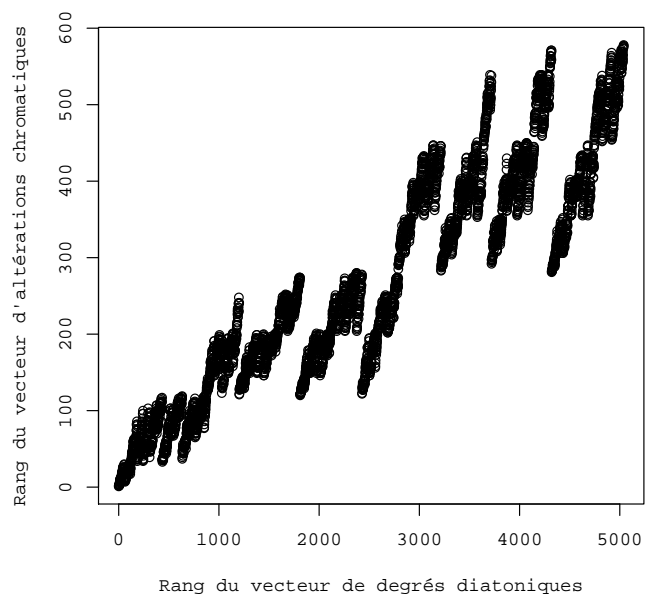


FIG. 3.4 – Ordre des degrés diatoniques δ' et ordre des altérations chromatiques α' associés aux 5040 permutations de $Perm(\mathbb{Z}_7)$, dans le cas de l'échelle \mathcal{S}_{30} .

Démonstration. Par vérification empirique sur les 5040 permutations (voir les tableaux A.1 à A.1). \square

L'unicité de l'association minimale et le lemme 4 garantissent que le vecteur d'altérations minimal est également unique, qu'il n'est réalisé que pour une unique association, la minimale.

Nul besoin de parcourir les $d!$ permutations de $Perm(\mathbb{Z}_d)$ pour trouver la solution de ce problème d'optimisation. Le lemme suivant garantit que l'association minimale réside parmi les permutations cycliques de l'identité. Sur un plan algorithmique, ceci garantit une croissance linéaire en d , et du point de vue musical, l'ordre chromatique des notes est respecté. Il n'arrive jamais qu'une note soit altérée au point de dépasser une autre.

Lemme 7. *Soient deux échelles $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \mathcal{S}_c^d$ leurs modes s et s' . L'association minimale est une permutation circulaire de \mathbb{Z}_d .*

$$\pi^* \in \langle \sigma \rangle \quad (3.54)$$

Démonstration. (Esquisse) Raisonnons par l'absurde. Si π^* n'est pas une permutation circulaire, alors elle contient une transposition croisant deux degrés. On peut supposer sans restreindre la généralité de la démonstration qu'il s'agit des deux premiers degrés : $\tau = (\bar{0} \ \bar{1})$. Sinon, une permutation circulaire suffit à retrouver ce cas. Les distances ou valeurs absolues étant plus difficiles à manipuler que les carrés, on leur préférera ces derniers pour donner une idée de comment les altérations peuvent croître en croisant les degrés.

$$= (\chi'_{\tau(1)} - \chi_1)^2 + (\chi'_{\tau(0)} - \chi_0)^2 \quad (3.55)$$

$$= (\chi'_0 - \chi_1)^2 + (\chi'_1 - \chi_0)^2 \quad (3.56)$$

$$= [(\chi'_0 - \chi_0) + (\chi_0 - \chi_1)]^2 + [(\chi'_1 - \chi_1) + (\chi_1 - \chi_0)]^2 \quad (3.57)$$

$$= (\chi'_0 - \chi_0)^2 + 2(\chi'_0 - \chi_0)(\chi_0 - \chi_1) + (\chi_0 - \chi_1)^2 \quad (3.58)$$

$$+ (\chi'_1 - \chi_1)^2 + 2(\chi'_1 - \chi_1)(\chi_1 - \chi_0) + (\chi_1 - \chi_0)^2 \quad (3.59)$$

$$= (\chi'_0 - \chi_0)^2 + (\chi'_1 - \chi_1)^2 + 2(\chi'_1 - \chi'_0)(\chi_1 - \chi_0) \quad (3.60)$$

Permuter des degrés déjà alignés dans le bon sens (celui du graphe dirigé) contribue à augmenter le vecteur d'altérations. \square

Cette conservation de l'ordre des notes explique pourquoi deux altérations seulement sont suffisantes pour décrire toutes les échelles. L'intervalle maximal entre deux degrés contigus de la gamme diatonique, en l'occurrence un ton entier, pose une limite aux altérations.

Une procédure pour construire la cloche peut être de partir d'un catalogue existant comme celui de Forte. Il s'agira de détecter les prime-forms qui ne sont pas des palindromes pour atteindre les 66 classes par transposition si l'on ne veut pas se restreindre au 38 par transposition/inversion. La construction d'une représentant de la cloche s'opère rapidement en cherchant d'abord laquelle des douze transpositions centre l'ensemble sur ré, puis laquelle des sept permutations

cycliques des indices minimise les altérations, soit un total de 19 opérations dans le pire des cas. On sait en outre que le résultat existe et qu'il est unique.

3.4 Conditions sur les cardinalités

Un bref rappel des conditions posées sur les cardinalités d et c met une fois de plus en lumière les bonnes propriétés du couple sept-douze, et peut servir à définir de nouveaux couple pour la musique micro-tonale.

1. Existence d'un générateur et d'une échelle monogène : $\langle c, d \rangle = 1$.
2. Pas de modes à transposition limitée : d premier.
3. Existence d'une échelle diatonique compacte et centrée : d impair.

Chapitre 4

Caractéristiques des échelles

Les déplacements le long de l'axe vertical de la cloche correspondent à des opérations connues du solfège et fournissent une mesure de la couleur du mode. L'axe horizontal indique le rang des échelles d'après l'ordre linéaire défini à la section 3. Il fait intervenir des objets pour lesquels il n'existe pas encore de théorie aussi bien établie, son interprétation est donc plus problématique. Les positions opposées qu'y occupent les deux échelles diatonique (\mathcal{S}_1 , en première position) et chromatique (\mathcal{S}_{38} en dernière position) pourraient faire penser à une mesure du caractère diatonique ou chromatique des échelles. Une manière de le vérifier est de s'assurer que d'autres indices de "diatonicité" viennent confirmer cette hypothèse.

Ces indices peuvent se trouver dans le répertoire existant. Le compositeur Anatol Vieru (1980) a proposé une telle mesure, appelée dia/chro. Et les recherches dans le domaine peuvent en inspirer de nouvelles. La littérature américaine peut servir de point de départ, si l'on construit des mesures indiquant de combien une échelle s'éloigne de la gamme diatonique en ne partageant pas l'une de ses nombreuses propriétés, comme par exemple sa (meilleure) répartition. L'idée est de développer une mesure dont la gamme diatonique serait un extrême, résultat d'une optimisation sur l'espace des échelles \mathcal{S}_{12}^7 . La théorie diatonique américaine est résumée dans le livre de Johnson (2003). Elle relève plusieurs aspects de la gamme diatonique : c'est la *mieux répartie* autour du cercle chromatique (Clough and Douthett, 1991). Elle est générée par un cycle de quarts ou de quintes, qui plus est, en termes diatoniques, cet intervalle apparaît sous un type unique, ce qui en fait une échelle *monogène* et *bien formée* (Carey and Clappitt, 1989). Le nombre de notes communes est différent pour chaque transposition, c'est une échelle *profonde* (Gamer, 1967b,a; Browne, 1981). L'échelle diatonique présente finalement la particularité de réaliser autant d'accords triadiques différents que le nombre de notes qui le composent (*cardinalité égale variété*), et le nombre de chacune des réalisations correspond à un

intervalle dans le cycle des quintes (*structure implique multiplicité*). Ces deux dernières propriétés découlent d'une troisième, appelée Myhill, qui stipule que chaque intervalle diatonique (tierce, quarte, etc...) existe exactement en deux réalisations chromatiques (mineur/majeur, juste/diminué, juste/augmenté). Le problème est qu'aucune des ces propriétés n'est une exclusivité de l'échelle diatonique, comme le montre le tableau 4.1. En revanche, sa particularité est de les cumuler. Une définition de la diatonicité proposée par Agmon repose sur deux critères fort semblables à ce que les Américains ont baptisé Myhill, mais avec une exigence supplémentaire, propre à l'échelle diatonique uniquement.

propriété	pentatonique	par tons	diatonique	chromatique	octotonique
ME	✓	✓	✓		✓
GEN	✓	✓	✓	✓	
WF	✓	✓	✓	✓	
MH	✓		✓	✓	
CEV	✓		✓	✓	
SIM	✓		✓	✓	
DS			✓	✓	

TAB. 4.1 – Les propriétés des échelles pentatonique (5 notes), par ton (6 notes), diatonique et chromatique (7 notes) et octotonique (8 notes). ME (bien répartie), GEN (monogène), WF (bien formée), MH (Myhill), CEV (cardinal égale variété), SIM (structure implique multiplicité), DS (profondeur d'échelle).

Les contributions de Quinn (2004) et Amiot (2007) montrent comment la transformée de Fourier permet d'unifier les aspects les plus géométriques de la théorie diatonique. Des indices ou mesures à caractère géométrique peuvent être définis pour mettre en lumière les échelles qui présentent des configurations particulières.

4.1 Indices

Une des particularités de la gamme diatonique est sa bonne répartition autour du cercle chromatique \mathbb{Z}_c . Lorsque d divise c , les degrés peuvent être disposés de manière parfaitement homogène. Ce n'est pas le cas des échelles à sept notes, pour lesquelles les notions géométriques de symétrie, de régularité et de qualité de la répartition diffèrent, au contraire de la gamme par tons ($d = 6$) qui les réunit toutes. Les quatre indices qui suivent tentent chacun de capturer un des aspects de la bonne répartition.

4.1.1 Distance euclidienne

De toutes les dispositions de points le long d'un cercle, le polygone régulier est la configuration qui réalise la distance euclidienne maximale entre eux. Il est possible de mesurer de combien s'approche une échelle de cette situation

idéale en calculant la distance moyenne entre degrés. Afin de conférer une structure géométrique d'espace normé au groupe cyclique, construction purement algébrique, on l'associe au cercle unité S^1 au moyen de l'application suivante, qui le plonge dans le plan complexe.

$$\begin{aligned} z : \mathbb{Z}_c &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \bar{n} &\longmapsto e^{i\frac{2\pi}{c}\bar{n}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Au contraire de la représentation habituelle de \mathbb{Z}_c sous forme d'horloge, $\bar{0}$ ne se trouve plus à midi, mais à trois heures, sur l'unité de l'axe réel. Le sens du déplacement n'est plus celui des aiguilles d'une montre, mais le sens positif couramment utilisé par les mathématiciens.

$$\begin{aligned} d : \mathcal{S}_c^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{S} &\longmapsto \bar{d}(\mathcal{S}) := \sum_{\chi, \chi' \in \mathcal{S}} |e^{i\frac{2\pi}{c}\chi'} - e^{i\frac{2\pi}{c}\chi}| \end{aligned} \quad (4.2)$$

Définition 24. La *distance euclidienne normalisée* d'une échelle $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_c^d$ est la distance euclidienne moyenne entre ses degrés rapportée à la même valeur calculée pour le polygone régulier \mathcal{S}^* à d sommets.

$$\begin{aligned} \delta : \mathcal{S}_c^d &\longrightarrow (0, 1) \\ \mathcal{S} &\longmapsto \delta(\mathcal{S}) = \frac{d(\mathcal{S})}{d(\mathcal{S}^*)} \\ \text{où } \mathcal{S}^* &:= \left\{ e^{i2\pi\frac{7}{12}k} \mid k \in \{0, \dots, 6\} \right\} \end{aligned}$$

Le réseau de distances entre les sept points de chaque échelle forme un graphe complet K_7 dont la longueur des arrêtes varie selon la disposition des sommets autour du cercle unité (fig. 4.1). Dans cette manière d'exprimer la distribution des points, l'échelle diatonique apparaît effectivement comme étant la mieux répartie (fig. 4.2).

4.1.2 Symétrie

Le premier coefficient de la transformée de Fourier indique le degré de symétrie de la disposition des points. En effet, la somme vectorielle des vecteurs unitaires reliant l'origine à chacun des degrés s'annule pour une disposition parfaitement symétrique. Le module indiquera la distance à l'origine, la phase la direction du centre de gravité des degrés de l'échelle (fig. 4.3).

Définition 25. L'*indice de symétrie* d'une échelle \mathcal{S}' est le module du premier coefficient de la transformée de Fourier discrète de sa fonction indicatrice.

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{S}_c^d &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \mathcal{S} &\longmapsto \sigma(\mathcal{S}) := |\mathcal{F}\{\mathbf{1}_{\mathcal{S}}\}[\bar{1}]| \end{aligned} \quad (4.3)$$

Plus la valeur de l'indice σ est faible, plus l'échelle est symétrique. L'échelle diatonique \mathcal{S}_1 ne réalise pas le minimum de σ (fig. 4.4).

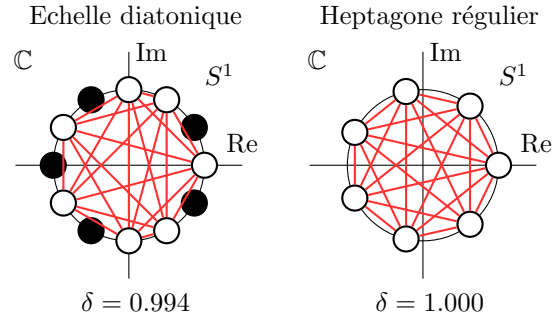


FIG. 4.1 – Distances euclidiennes dans le plan complexe, symbolisées par les lignes rouges. Cas idéal de l’heptagone régulier \mathcal{S}^* et meilleure approximation par l’échelle diatonique \mathcal{S}_1 .

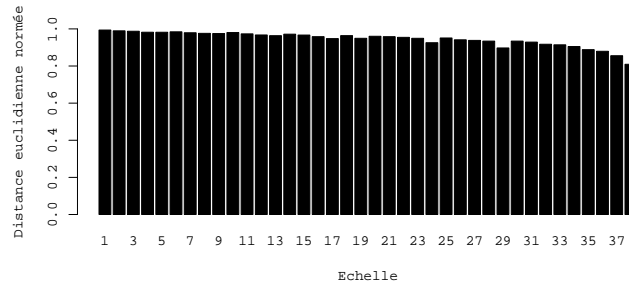


FIG. 4.2 – Indice de répartition δ en fonction des 38 classes d’échelles de $\mathcal{S}_{12}^7/\mathbb{D}_{12}$.

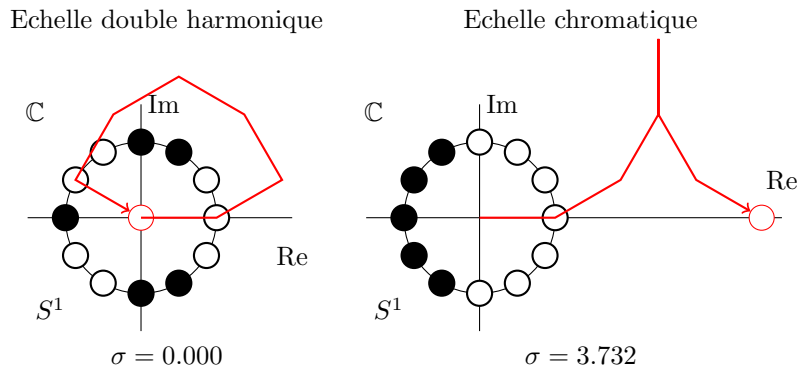


FIG. 4.3 – Le premier coefficient de la transformée de Fourier de la fonction caractéristique équivaut à une somme vectorielle de vecteurs unitaires dans le plan complexe. Cas parfaitement symétrique de l’échelle double harmonique \mathcal{S}_5 , et le moins symétrique, celui de l’échelle chromatique \mathcal{S}_{38} .

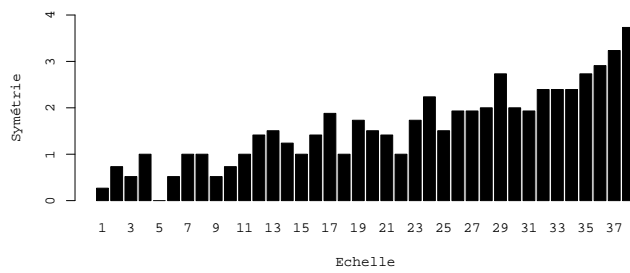


FIG. 4.4 – Indice de symétrie σ en fonction des 38 classes d’échelles de $\mathcal{S}_{12}^7/\mathbb{D}_{12}$.

4.1.3 Périodicité

La périodicité est exactement ce que détecte la transformée de Fourier. Plus le module d'une composante dont l'indice k est un diviseur de c est élevé, plus la fonction caractéristique sera périodique de période $\frac{c}{k}$ (fig. 4.6).

Définition 26. *L'indice de périodicité π d'une échelle \mathcal{S}' est le module maximal des composantes de la transformée de Fourier dont l'indice divise c .*

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{S}_c^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{S} &\longmapsto \pi(\mathcal{S}) := \max_{k|c} |\mathcal{F}\{\mathbb{1}_{\mathcal{S}}\}[\bar{k}]| \end{aligned} \quad (4.4)$$

Il est essentiel de considérer la composante sur laquelle $|\mathcal{F}\{\mathbb{1}_{\mathcal{S}}\}|$ prend son maximum uniquement parmi celles qui divisent c . En effet, toutes composantes confondues (excepté $\bar{1}$), le maximum des coefficients de l'échelle diatonique \mathcal{S}_1 est le plus élevé, mais celui-ci est réalisé pour la composante $\bar{7}$ qui fait partie des unités \mathbb{Z}_c^\times (fig. 4.5).

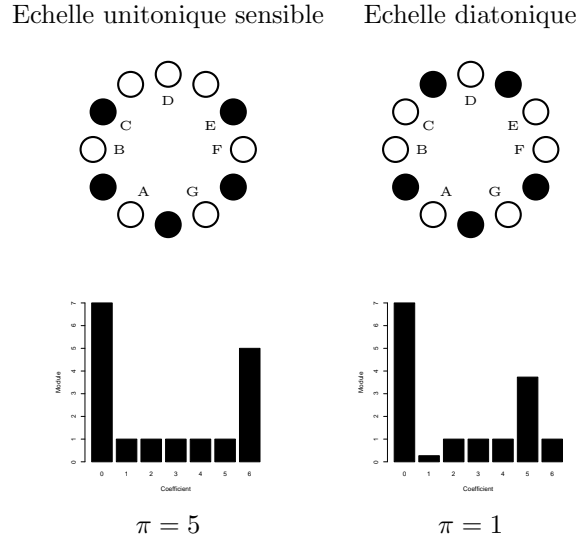


FIG. 4.5 – Exemples de mesure de la périodicité π d'une échelle. L'unitonique sensible \mathcal{S}_4 contient l'échelle par tons, parfaitement régulière. C'est elle qui obtient le meilleur score.

4.1.4 Répartition

La notion de gamme la mieux répartie peut s'exprimer en fonction du module du \bar{d} -ième coefficient de la transformée de Fourier, pour autant que c et d soient

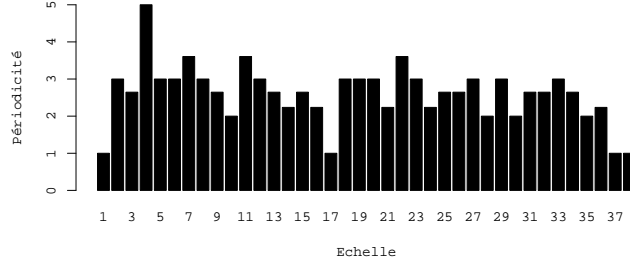


FIG. 4.6 – Indice de périodicité π par classe de $\mathcal{S}_{12}^7/\mathbb{D}_{12}$.

premiers entre eux, une condition déjà rencontrée à plusieurs reprises. Ce coefficient devient maximal pour l'échelle la mieux répartie, à savoir la diatonique (Amiot, 2007).

Définition 27. *L'indice de répartition ε est calculé d'après le module du \bar{d} -ième coefficient de la transformé de Fourier, à condition que c et d soient premiers entre eux.*

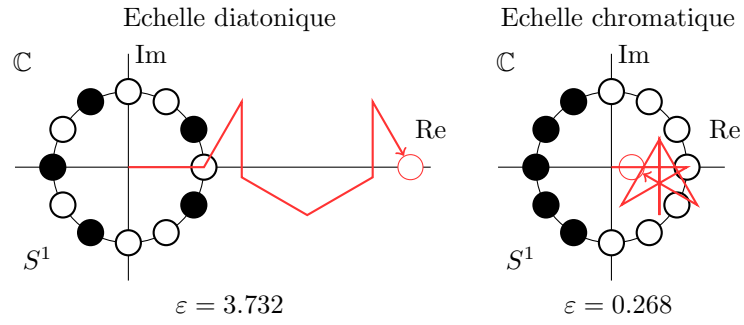
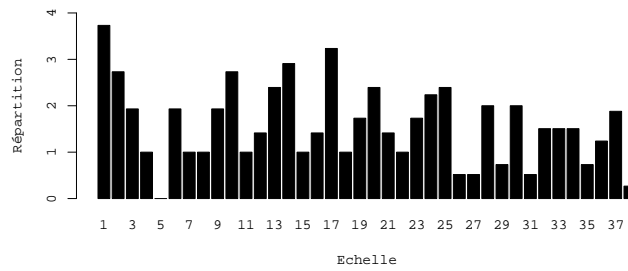
$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathcal{S}_c^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{S} &\longmapsto \varepsilon(\mathcal{S}) := |\mathcal{F}\{\mathbf{1}_{\mathcal{S}}\}[\bar{d}]| \end{aligned} \quad (4.5)$$

Il s'agit du même principe que pour la mesure de la symétrie, sauf que les indices ont été permutés par la transformation affine $M_{\bar{7}}$ (fig. 4.5). Si l'échelle diatonique \mathcal{S}_1 obtient le meilleur score, l'autre extrême n'est pas l'échelle chromatique \mathcal{S}_{38} , mais la double harmonique \mathcal{S}_5 qui s'était déjà distinguée par la meilleure symétrie (fig. 4.8). Il faut dire que cette échelle possède la particularité d'être conservée par toute transformation affine. Les deux mesures σ et ε coïncident pour \mathcal{S}_5 .

4.1.5 Mesure dia/chro d'Anatol Vieru

Le compositeur Anatol Vieru a proposé une mesure du caractère plutôt diatonique ou chromatique d'une échelle définie comme le rapport entre le nombre de segments formés par des degrés contigus entre les cercles chromatique et diatonique, après une multiplication par 7 (fig. 4.9). De façon plus formelle, en utilisant le langage de la théorie des graphes, cet indice est le rapport du nombre de composantes faiblement connectées N des graphes induits par le sous-ensemble diatonique et chromatique.

$$\begin{aligned} \kappa : \mathcal{S}_c^d &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ \mathcal{S} &\longmapsto \kappa(\mathcal{S}) := \frac{D_{\mathbb{Z}_d}[\mathcal{S}]}{D_{\mathbb{Z}_d}[M_{\bar{d}}(\mathcal{S})]} \end{aligned} \quad (4.6)$$

FIG. 4.7 – Mesure de la répartition ε de \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_{38} .FIG. 4.8 – Indice de répartition ε en fonction des 38 classes d'échelles de $\mathcal{S}_{12}^7/\mathbb{D}_{12}$.

Il parvient ainsi à dégager 11 classes, parmi lesquelles les échelles diatonique et chromatique occupent effectivement des valeurs extrêmes, et ceci de façon isolée (fig. 4.10).

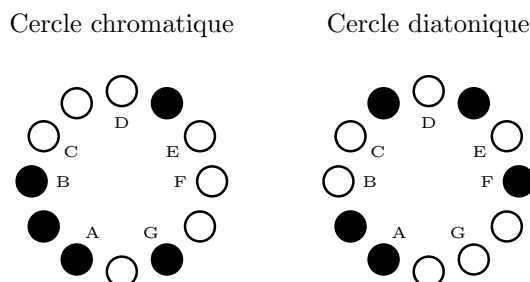


FIG. 4.9 – Mesure dia/chro d’A. Vieu pour l’échelle \mathcal{S}_{27} . Le nombre de *segments* ou composantes chromatiques est de 3, il y en a 4 diatoniques, leur rapport vaut donc $\kappa(\mathcal{S}_{27}) = \frac{4}{3} = 1.\bar{3}$.

Les dix échelles “auto-affines” (conservées par une multiplication par 5 ou 7) présentent autant d’îlots chromatiques que diatoniques, leur mesure vaut alors 1, soit 0 sur l’échelle logarithmique (fig. 4.10). Six autres échelles présentent cette propriété sans forcément être symétriques sous l’action du groupe affine : les trois paires d’échelles en Z-relation. Le reste des échelles forme des paires dont les mesures sont exactement les inverses (opposés sur l’échelle logarithmique).

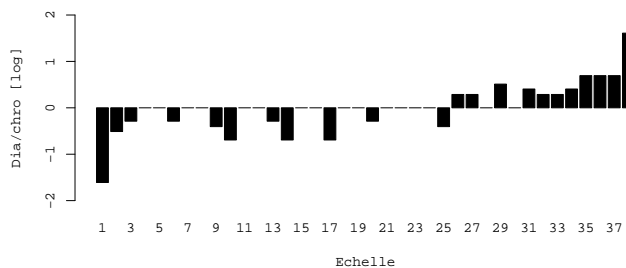


FIG. 4.10 – Indices dia/chro en fonction des 38 classes d’échelles de $\mathcal{S}_{12}^7/\mathbb{D}_{12}$.

4.2 Comparaison entre indices

Les indices présentés dans cette section ne mesurent pas tous les mêmes aspects des échelles, comme l'atteste l'étalement des nuages de points dans les graphiques de la figure 4.11. On note que le rang de l'échelle, la distance euclidienne et la symétrie présentent des tendances similaires. Un défaut des trois dernières mesures est l'étendue relativement limitée de la plage de valeurs qu'elles peuvent prendre (seulement sept pour ε et π). La mesure diachro, théoriquement sans restriction, n'exhibe que 11 valeurs différentes. Le jeu de permutation des indices par la multiplication par sept apparaît clairement dans le graphique $\sigma \sim \varepsilon$, symétrique par rapport à la diagonale.

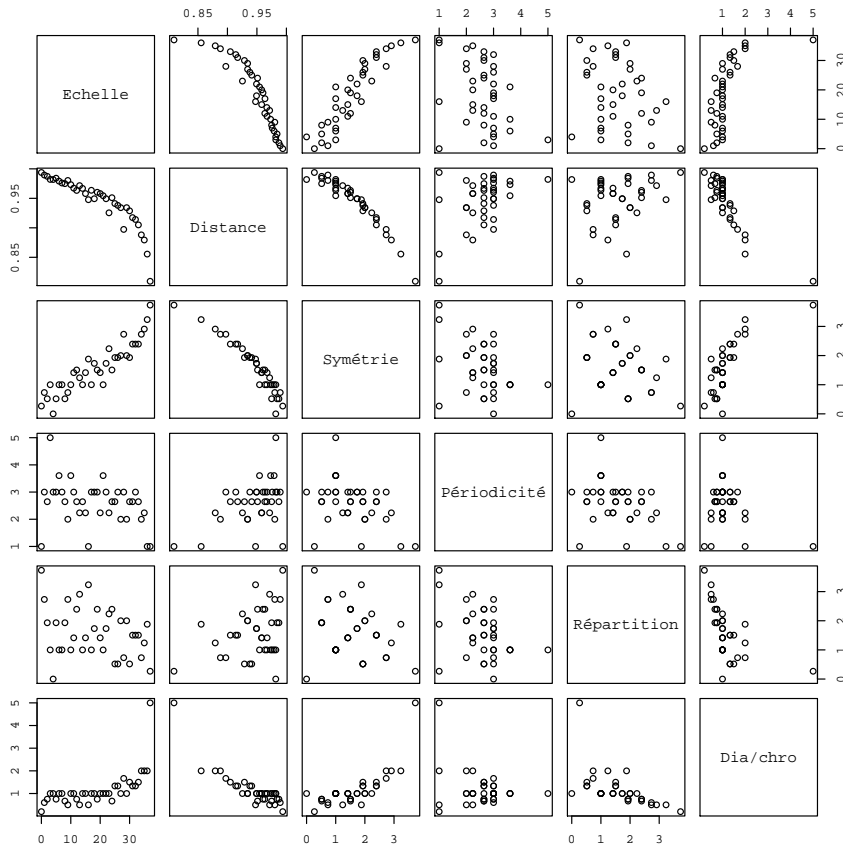


FIG. 4.11 – Comparaison des indices : rang de l'échelle (numéro de colonne dans la cloche), distance euclidienne δ , symétrie σ , périodicité π , bonne répartition ε et mesure dia/chro κ des 38 classes d'échelle de $\mathcal{S}_{12}^7/\mathbb{D}_{12}$. Chaque graphique du tableau représente un croisement entre deux indices. Toutes les combinaisons possibles y figurent, la diagonale indiquant de quelle paire il s'agit. Ce tableau est symétrique, sauf que les axes se trouvent échangés entre ses moitiés supérieure et inférieure.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Autant une théorie est-elle nécessaire pour bâtir une représentation, autant de nouvelles théories peuvent-elles émerger si l'on dispose d'outils de visualisation permettant d'en découvrir des aspects encore ignorés. Ce travail pose les bases d'une formalisation mathématique de la cloche diatonique, ouvrant la voie à son utilisation pour l'étude et l'exploration des échelles. Une première réalisation concrète de cette idée est l'atlas des modes en ligne :

<http://www.cloche-diatonique.ch/>

La cloche diatonique peut être considérée comme une réconciliation entre théories tonale et atonale, une sorte de continuité ou de synthèse telle que souhaitée par Costère (Costère, 1962). Elle se sert des outils et du formalisme de la *set theory*, conçus pour l'étude de la musique atonale de la deuxième école de Vienne, mais y intègre le cycle des quintes et la symétrie du ré, notions essentiellement tonales.

L'axe vertical de la cloche mesure la couleur des modes, une notion bien établie pour les premières échelles les plus courantes. En revanche, l'axe horizontal ne permet pas encore une interprétation aussi limpide. L'ordre linéaire induit par la cloche ne suffit pas à classer les échelles de la plus diatonique à la plus chromatique. Tous les systèmes de classification, soient-ils issus de la tradition américaine (Forte, Rahn, etc.) ou européenne (Vieru, Mesnage, etc.) parviennent parfaitement à séparer ces deux pôles, mais peinent à traiter les échelles intermédiaires. La divergence entre les différents indicateurs et les liens affines semblent indiquer que celles-ci constituent une réalité plus complexe, pour une description de laquelle une seule dimension n'est pas suffisante. Toujours est-il que la liste d'indicateurs présentée à la section 4, si elle ne parvient pas à ordonner clairement les échelles, permet d'en stigmatiser certaines aux propriétés particulièrement intéressantes.

Si l'on traduit la procédure de construction des représentants de classe d'échelle dans le domaine de la mécanique en considérant chaque degré comme une masse ponctuelle distribuée autour de l'axe de ré, on se rend compte que la permutation (les altérations) est celle qui minimise les moments des deux

premiers ordres : le centre de gravité est situé à l'origine (équilibre) et le tenseur d'inertie est minimal, la distribution étant la plus compacte possible.

Pourquoi se limiter aux échelles à sept notes ? La construction de la cloche repose sur l'existence d'une échelle diatonique, chose possible uniquement pour des échelles dont le nombre de notes est premier avec le total chromatique. N'entrent alors en ligne que les échelles penta- et heptatoniques, si l'on exclut le cas des échelles dodécatoniques identiques au total chromatique. Il est également intéressant de constater que les échelles à six notes constituent l'ensemble le plus nombreux et à priori le plus riche aussi longtemps que l'on ignore l'équivalence par transposition. Or la divisibilité $d|c = 6|12$ entraîne l'apparition de modes à transposition limitée. Ils réduisent le nombre de classes d'échelles par transposition au un nombre identique au cas heptatonique, une certaine efficacité qui justifie le choix de ce dernier, et garantit également l'existence de sept modes distincts pour chaque échelle.

Les résultats présentés ici n'épuisent de loin pas toutes les possibilités d'investigations autour de la cloche diatonique. Un grand nombre de questions essentielles restent ouvertes, comme le comportement des accords constitués de triades dans les échelles exotiques. Les propriétés d'existence de deux types d'intervalles chromatique par intervalle diatonique (Myhill), de *cardinalité égale variété* (CEV) et *structure implique multiplicité* (SIM) de l'échelle diatonique se perdent au centre de la cloche, pour se retrouver à l'autre extrême chromatique.

La situation privilégiée de la cloche diatonique, au croisement de l'héritage tonal et des explorations atonales, en fait une source particulièrement riche de réflexions. Elle a donné lieu à une collaboration active entre le Conservatoire de Lausanne-Haute Ecole de Musique et l'Equipe Représentations Musicales de l'IRCAM-Centre G. Pompidou. C'est dans ce cadre appelé à se développer que s'inscrit ce stage, et la formalisation mathématique des travaux initiaux de Pierre Audétat a bénéficié des conseils et de la longue expérience que ce musicien a du sujet.

Le contenu du chapitre 4 a déjà fait l'objet d'une présentation lors de la journée dédiée aux aspects musicaux, cognitifs et mathématiques de la théorie diatonique, qui s'est tenue dans le cadre du séminaire MaMuX, le 25 avril 2008 à l'IRCAM. A cette occasion, les remarques et critiques pertinentes d'Eytan Agmon ont permis de mieux cerner les contours théoriques de la cloche, sa force et ses limites, et d'en entrevoir les développements futurs.

Annexe A

Appendice

A.1 Echelles

Cette section présente le catalogue complet des 66 classes d'échelles. Le représentant tel que défini dans le chapitre 3 y figure dans le cercle chromatique prenant son origine $\bar{0}$ en ré, à côté des module et phase de sa transformée de Fourier discrète ainsi que des structures et contenus intervalliques, tous présentés sous forme graphique afin d'en faciliter la comparaison.

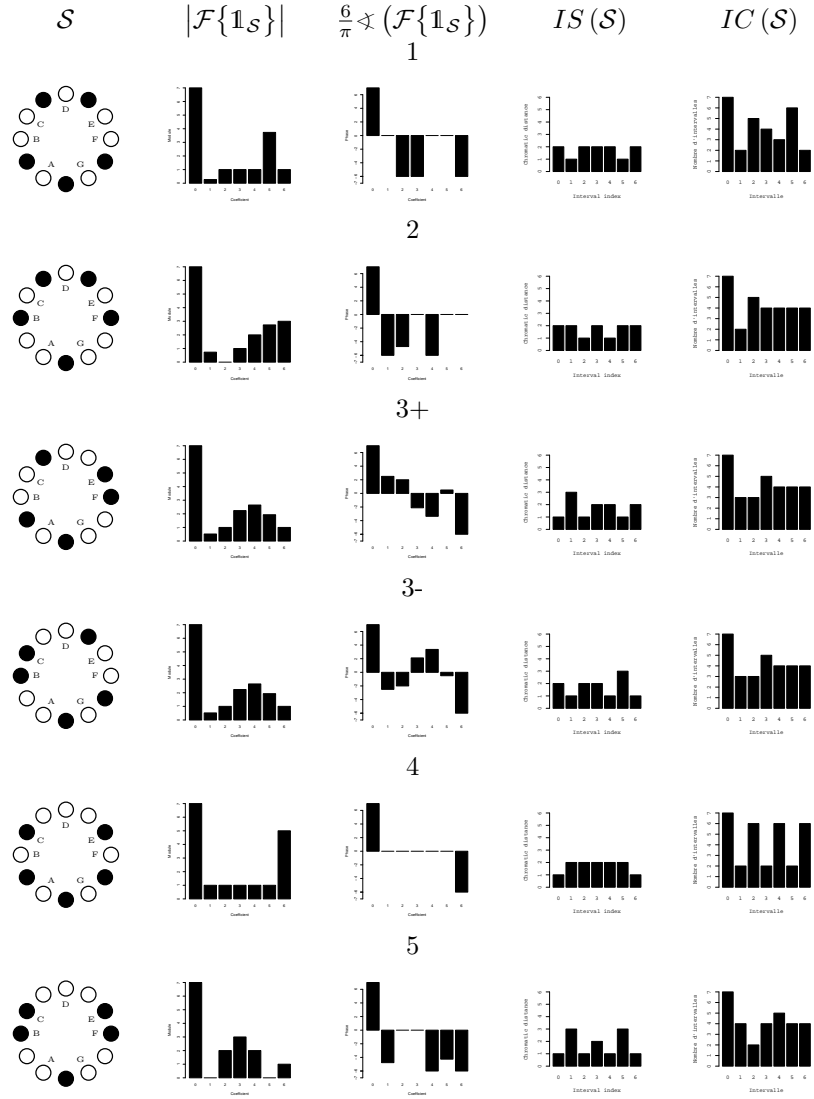


FIG. A.1 – Représentation en cercle chromatique, module et phase de la transformée de Fourier discrète, structure et contenu intervallique des échelles 1 à 5

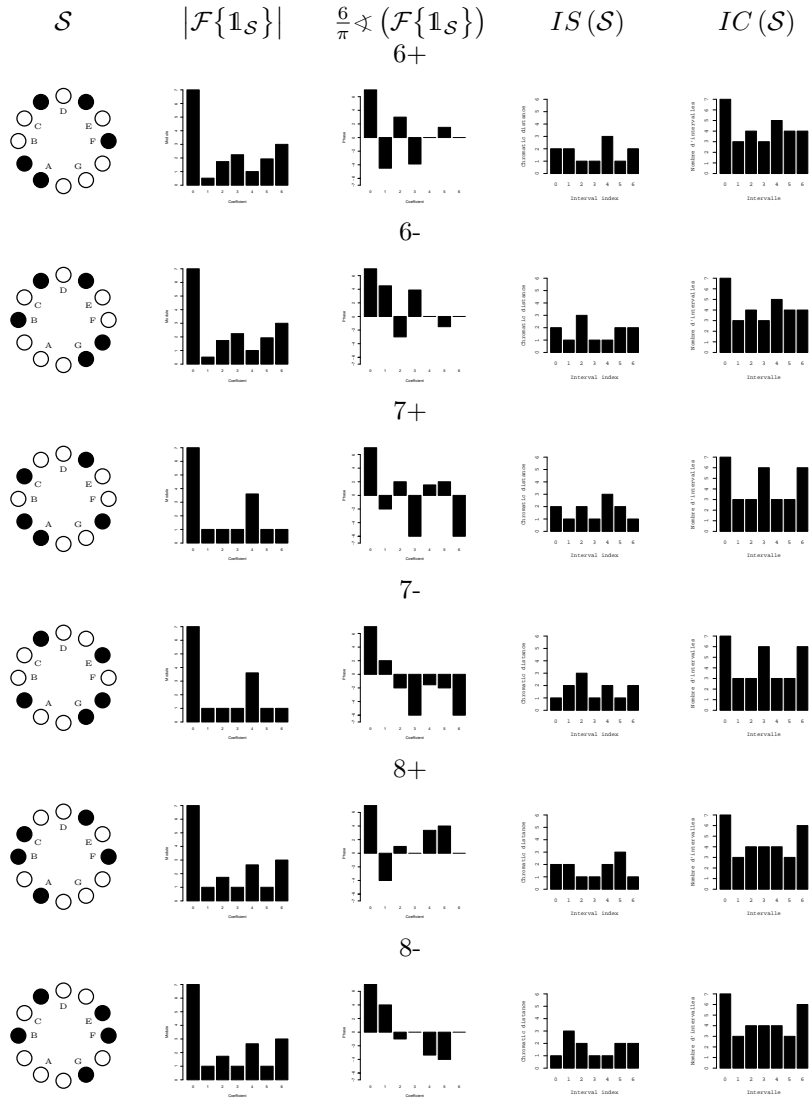


FIG. A.2 – Représentation en cercle chromatique, module et phase de la transformée de Fourier discrète, structure et contenu intervallique des échelles 6+ à 8-

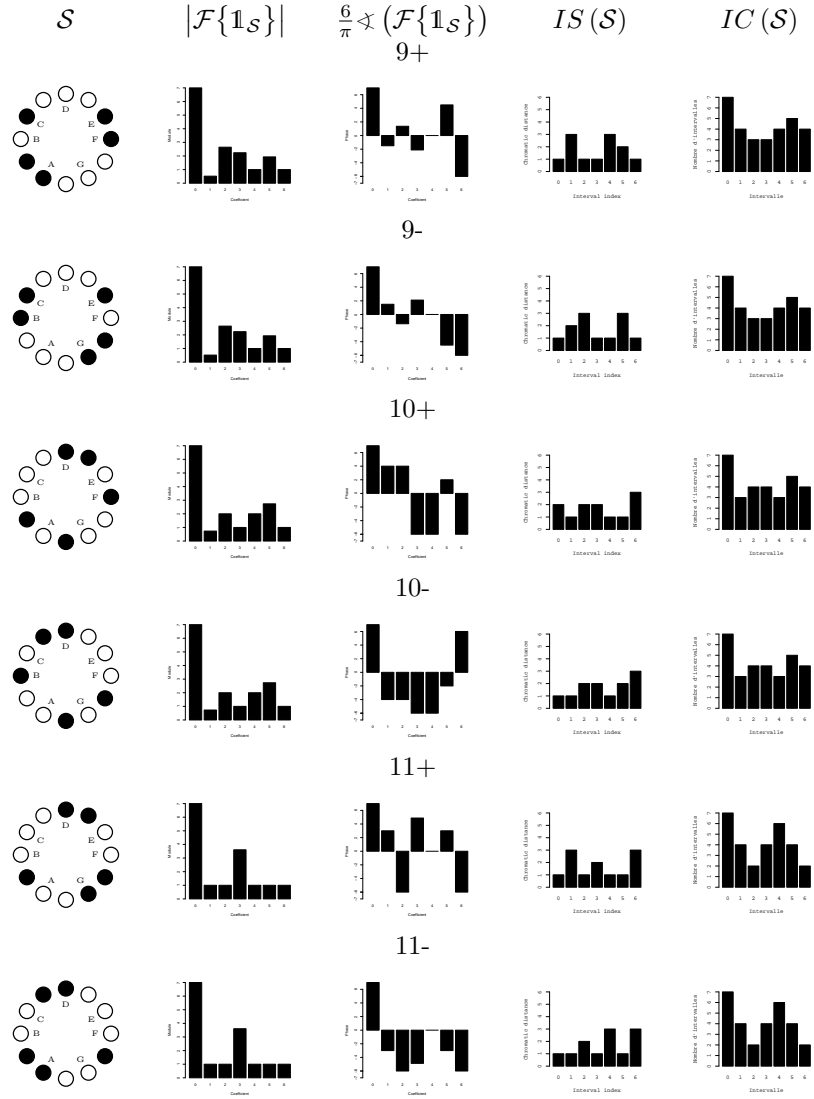


FIG. A.3 – Représentation en cercle chromatique, module et phase de la transformée de Fourier discrète, structure et contenu intervallic des échelles 9+ à 11-

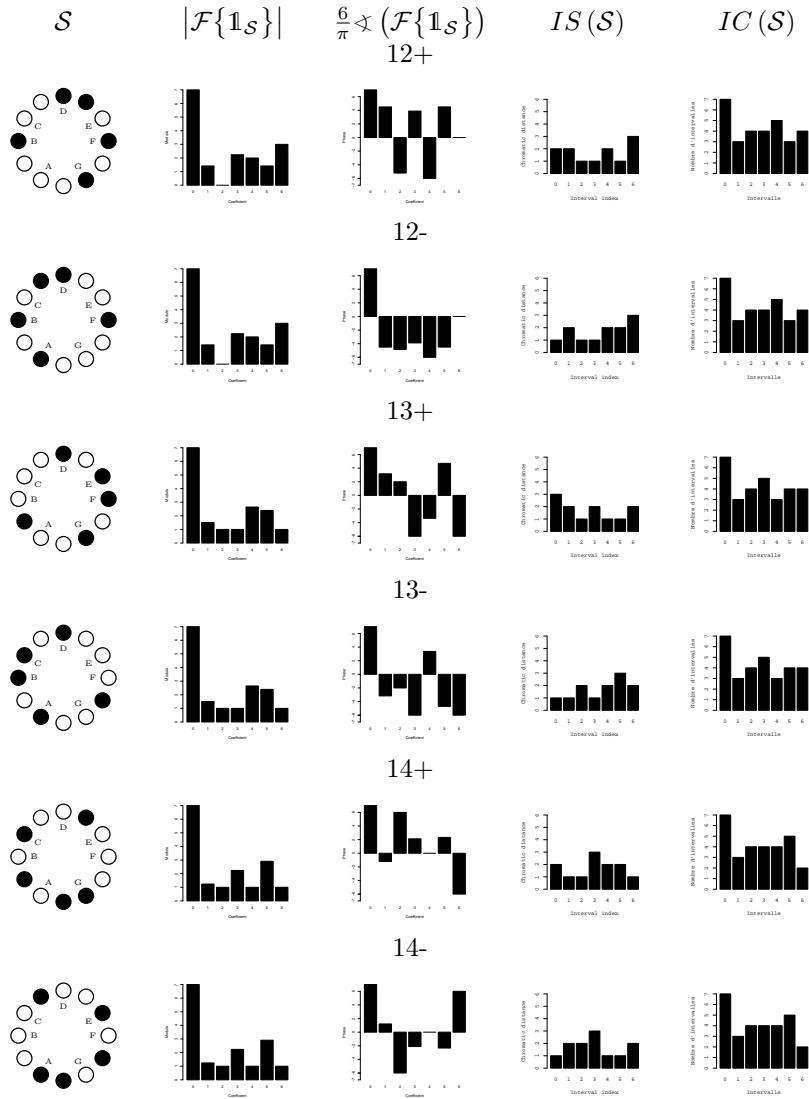


FIG. A.4 – Représentation en cercle chromatique, module et phase de la transformée de Fourier discrète, structure et contenu intervallique des échelles 12+ à 14-

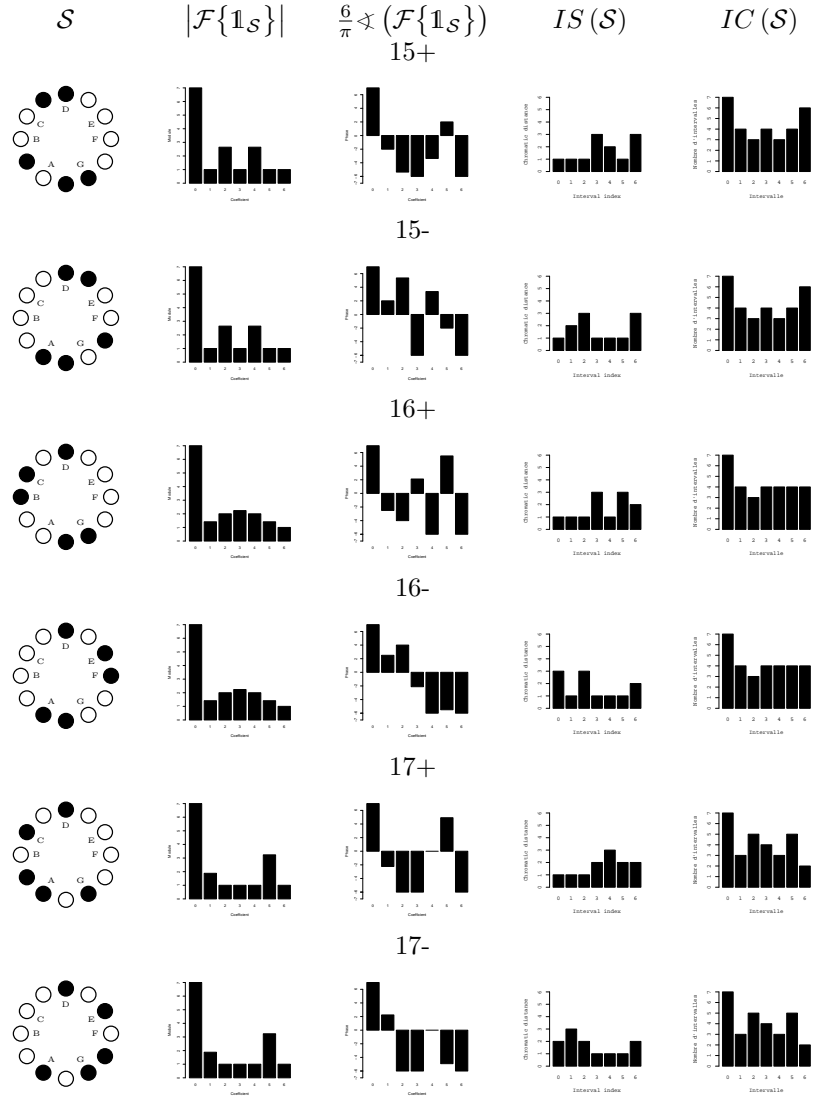


FIG. A.5 – Représentation en cercle chromatique, module et phase de la transformée de Fourier discrète, structure et contenu intervallique des échelles 15+ à 17-

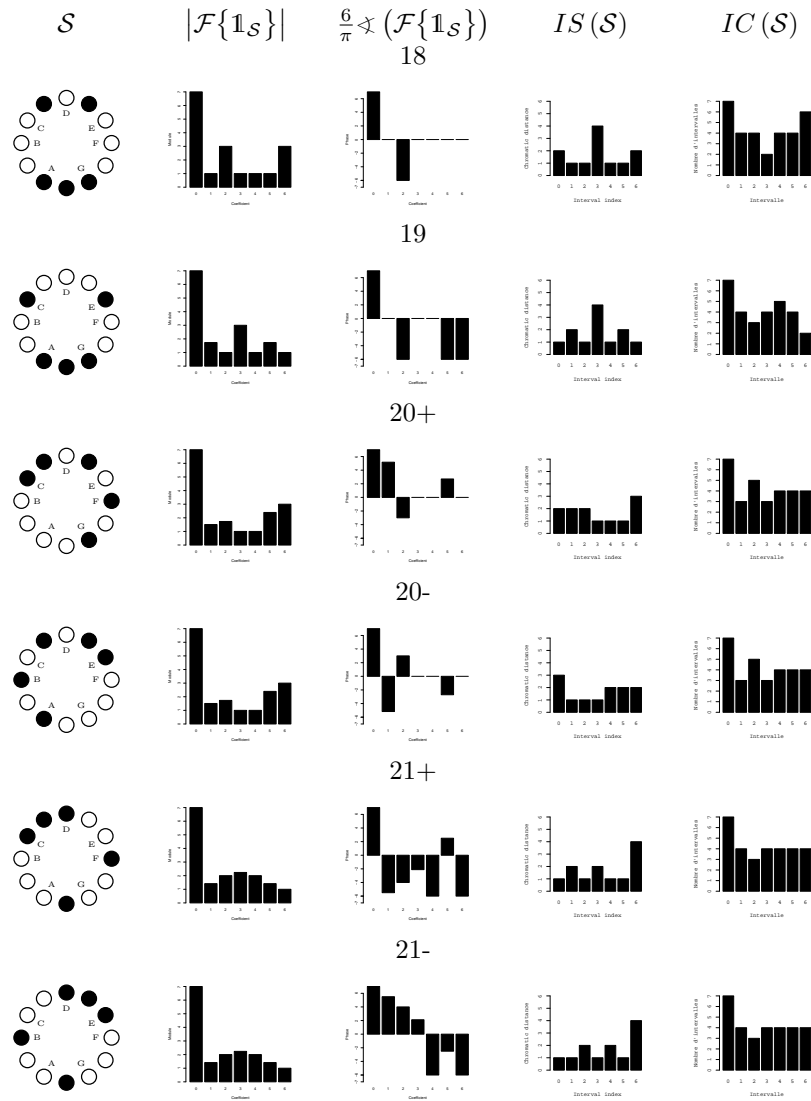


FIG. A.6 – Représentation en cercle chromatique, module et phase de la transformée de Fourier discrète, structure et contenu intervallique des échelles 18 à 21-

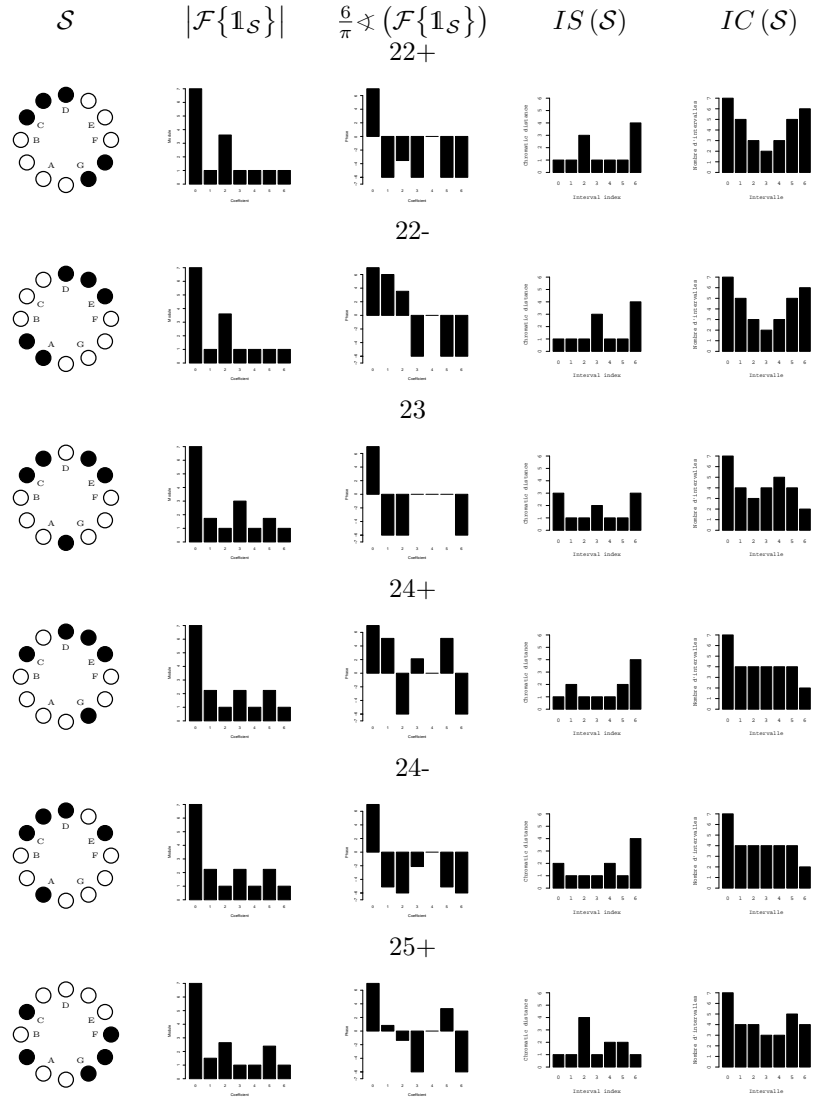


FIG. A.7 – Représentation en cercle chromatique, module et phase de la transformée de Fourier discrète, structure et contenu intervallique des échelles 22+ à 25+

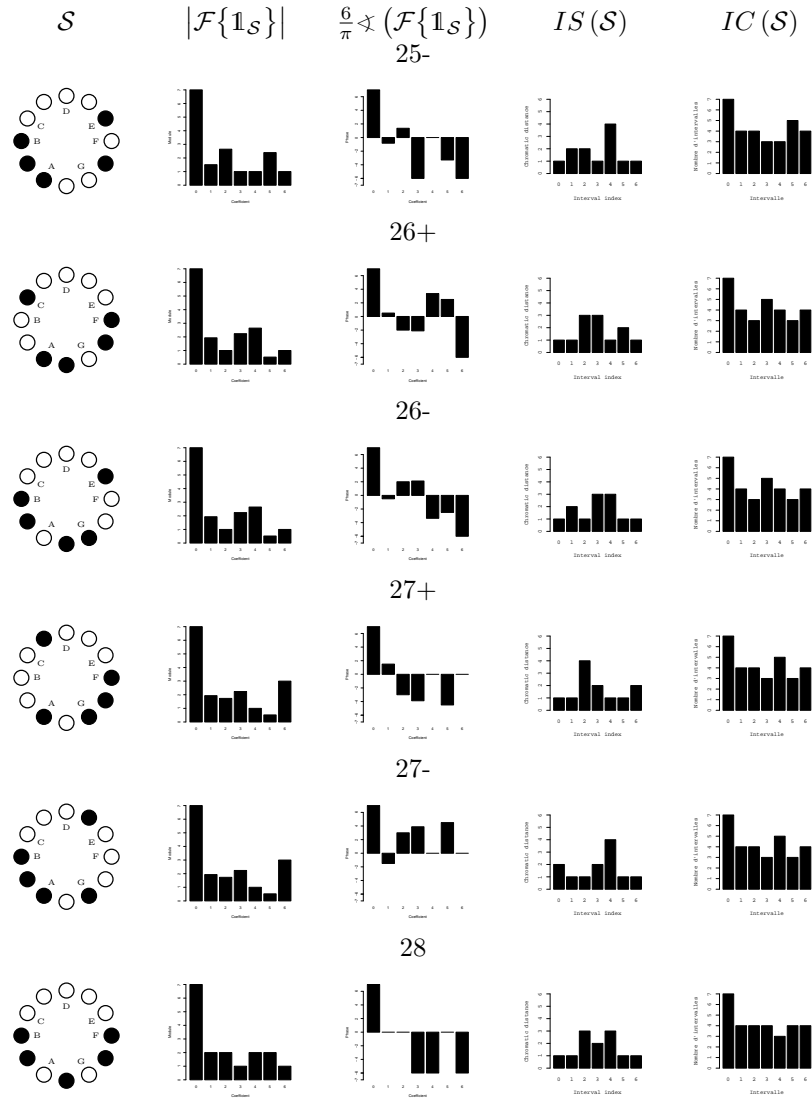


FIG. A.8 – Représentation en cercle chromatique, module et phase de la transformée de Fourier discrète, structure et contenu intervallique des échelles 25- à 28

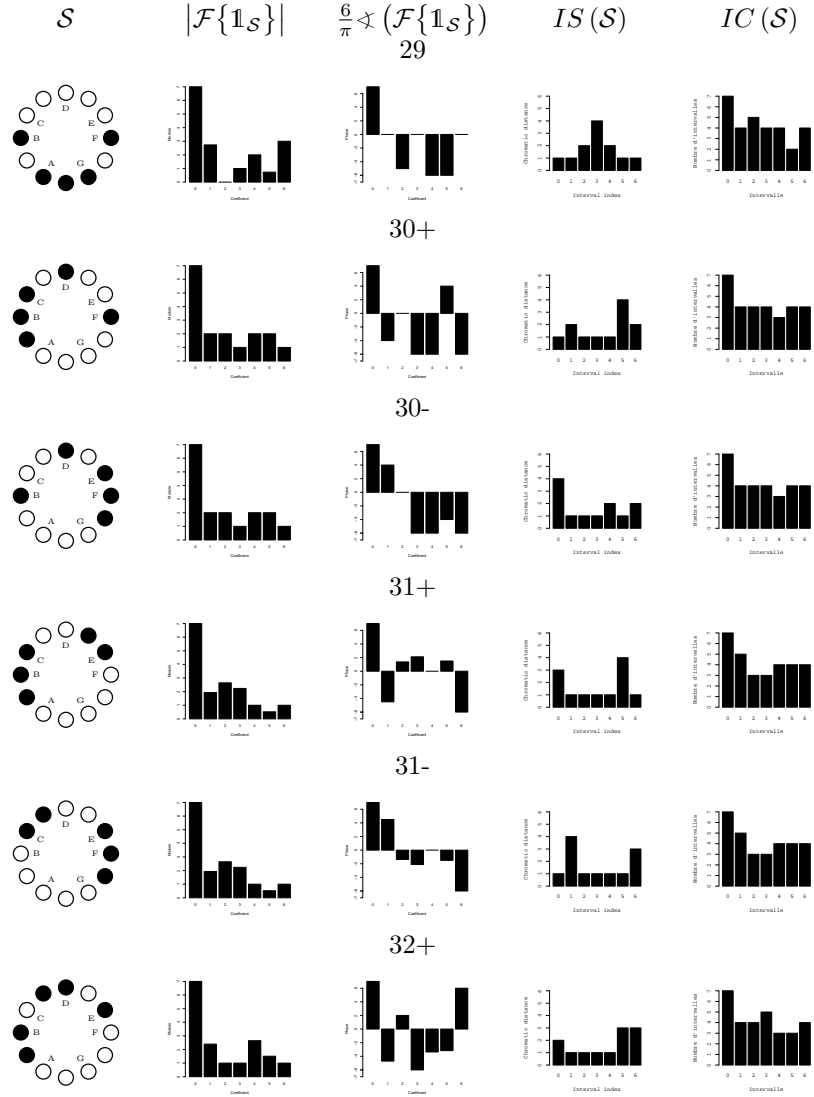


FIG. A.9 – Représentation en cercle chromatique, module et phase de la transformée de Fourier discrète, structure et contenu intervallique des échelles 29 à 32+

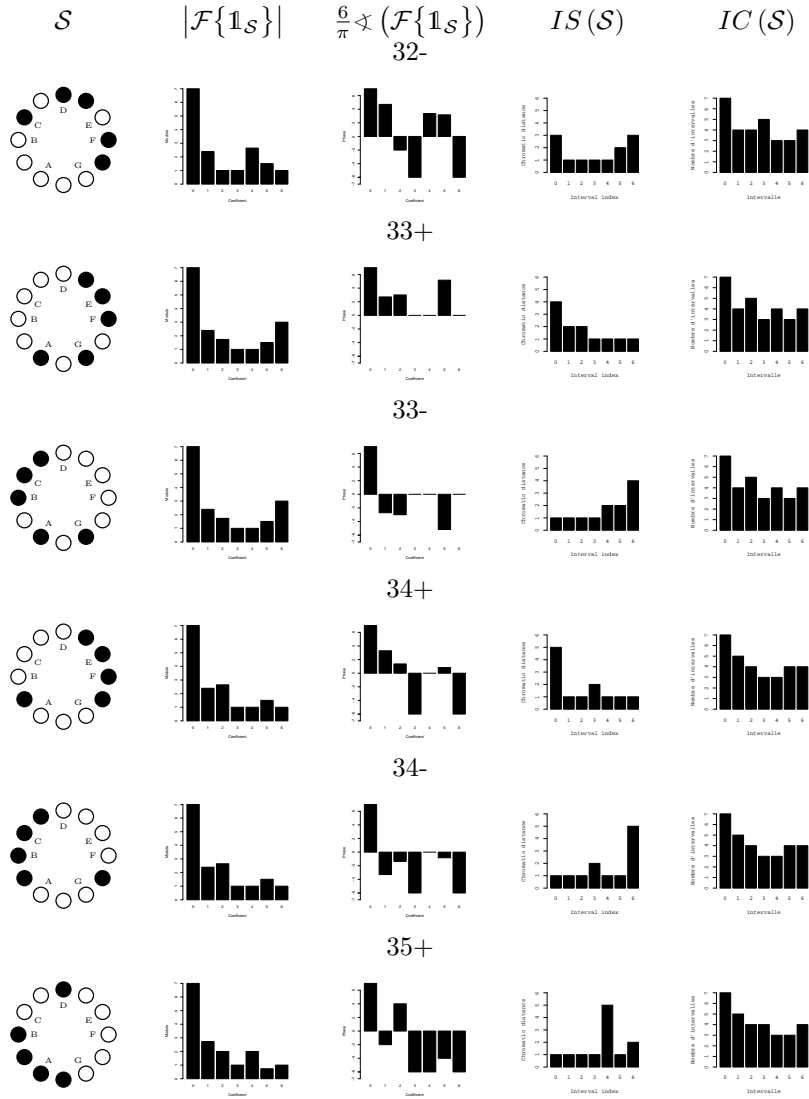


FIG. A.10 – Représentation en cercle chromatique, module et phase de la transformée de Fourier discrète, structure et contenu intervallique des échelles 32- à 35+

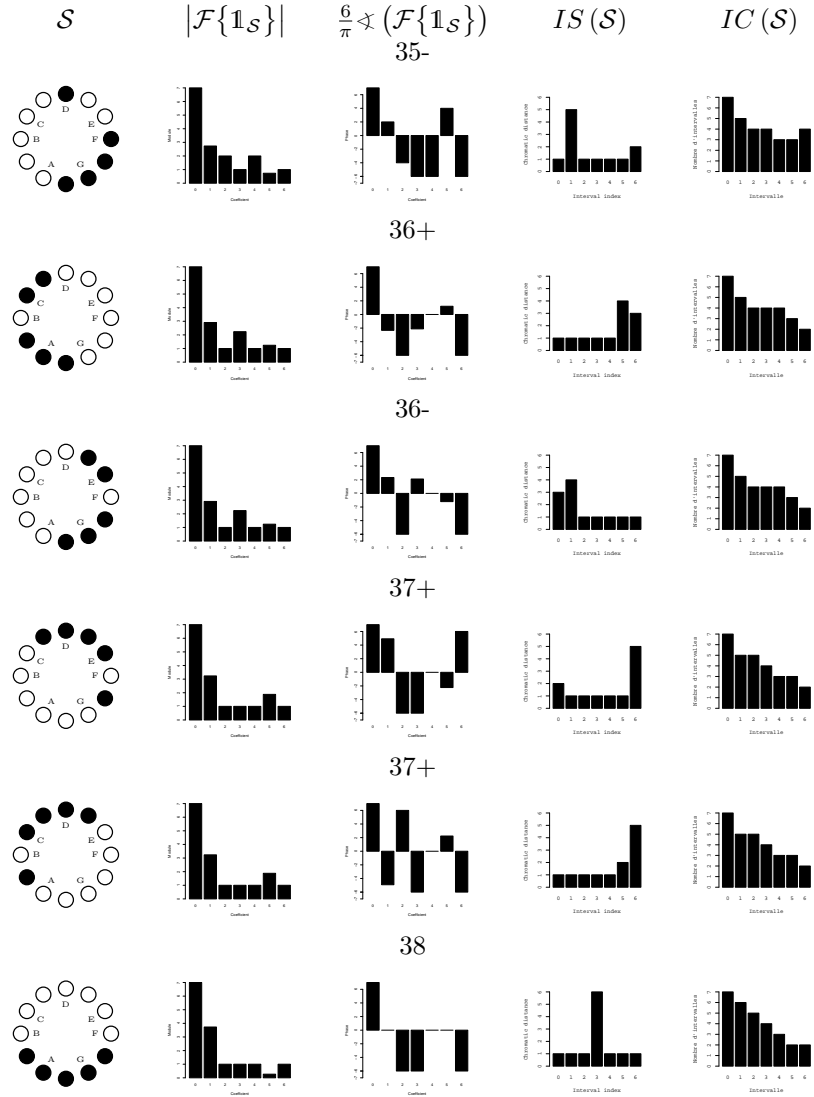


FIG. A.11 – Représentation en cercle chromatique, module et phase de la transformée de Fourier discrète, structure et contenu intervallique des échelles 35- à 38

A.2 Permutations

Seul un extrait de la liste complète des 5040 permutations de chaque classe diédrale est reporté ici. Elle permet de vérifier empiriquement l'unicité des associations minimales et le fait que celles-ci sont des permutations circulaires.

\mathcal{S}'	π	$(\delta'_{o(\bar{k})})$	$(a'_{o(\bar{k})})$	$\sum_{\bar{k}} \delta'_k $	$\sum_{\bar{k}} a'_k $	$\sum_{\bar{k}} a'_k$
1	(0 1 2 3 4 5 6)	(-3 -2 -1 0 1 2 3)	(0 0 0 0 0 0 0)	12	0	0
2	(0 1 2 3 4 5 6)	(-4 -2 -1 0 1 2 4)	(-1 0 0 0 0 0 1)	14	2	0
3	(0 1 2 3 4 5 6)	(-5 -2 -1 0 1 3 4)	(-1 0 0 0 0 0 1)	16	2	0
4	(0 1 2 3 4 5 6)	(-5 -3 -1 0 1 3 5)	(-1 0 0 0 0 0 1)	18	2	0
5	(0 1 2 3 4 5 6)	(-5 -4 -1 0 1 4 5)	(-1 -1 0 0 0 1 1)	20	4	0
6	(0 1 2 3 4 5 6)	(-6 -2 -1 0 2 3 4)	(-1 0 0 0 0 0 1)	18	2	0
7	(0 1 2 3 4 5 6)	(-6 -3 -1 0 2 3 5)	(-1 0 0 0 0 0 1)	20	2	0
8	(0 1 2 3 4 5 6)	(-6 -4 -1 0 2 4 5)	(-1 -1 0 0 0 1 1)	22	4	0
9	(0 1 2 3 4 5 6)	(-6 -5 -1 0 3 4 5)	(-1 -1 0 0 0 1 1)	24	4	0
10	(6 0 1 2 3 4 5)	(-7 -2 -1 1 2 3 4)	(-1 0 0 0 0 0 1)	20	2	0
11	(6 0 1 2 3 4 5)	(-7 -3 -2 1 2 3 6)	(-1 0 0 0 0 0 1)	24	2	0
12	(6 0 1 2 3 4 5)	(-7 -4 -2 1 2 4 6)	(-1 -1 0 0 0 1 1)	26	4	0
13	(6 0 1 2 3 4 5)	(-7 -5 -2 1 3 4 6)	(-1 -1 0 0 0 1 1)	28	4	0
14	(0 1 2 3 4 5 6)	(-8 -3 0 1 2 3 5)	(-1 0 0 0 0 0 1)	22	2	0
15	(0 1 2 3 4 5 6)	(-8 -3 -2 1 2 3 7)	(-1 0 0 0 0 0 1)	26	2	0
16	(0 1 2 3 4 5 6)	(-8 -4 -3 1 2 5 7)	(-1 -1 0 0 0 1 1)	30	4	0
17	(0 1 2 3 4 5 6)	(-8 -6 -3 2 3 5 7)	(-1 -1 0 0 0 1 1)	34	4	0
18	(0 1 2 3 4 5 6)	(-8 -3 -2 0 2 3 8)	(-1 0 0 0 0 0 1)	26	2	0
19	(0 1 2 3 4 5 6)	(-8 -5 -3 0 3 5 8)	(-1 -1 0 0 0 1 1)	32	4	0
20	(0 1 2 3 4 5 6)	(-9 -4 0 1 2 4 6)	(-1 -1 0 0 0 1 1)	26	4	0
20	(0 1 2 3 4 6 5)	(-16 0 1 2 3 4 6)	(-2 0 0 0 0 1 1)	32	4	0
21	(0 1 2 3 4 5 6)	(-9 -4 -1 1 2 4 7)	(-1 -1 0 0 0 1 1)	28	4	0
21	(0 1 2 3 4 6 5)	(-16 -1 1 2 3 4 7)	(-2 0 0 0 0 1 1)	34	4	0
22	(0 1 2 3 4 5 6)	(-9 -4 -3 1 2 6 7)	(-1 -1 0 0 0 1 1)	32	4	0
22	(0 1 2 3 4 6 5)	(-16 -3 1 2 3 6 7)	(-2 0 0 0 0 1 1)	38	4	0
23	(0 1 2 3 4 5 6)	(-9 -4 -1 0 1 4 9)	(-1 -1 0 0 0 1 1)	28	4	0
23	(0 1 2 3 4 6 5)	(-16 -1 0 1 3 4 9)	(-2 0 0 0 0 1 1)	34	4	0
23	(0 2 1 3 4 5 6)	(-9 -4 -3 -1 0 1 16)	(-1 -1 0 0 0 0 2)	34	4	0
23	(0 2 1 3 4 6 5)	(-16 -3 -1 0 1 3 16)	(-2 0 0 0 0 0 2)	40	4	0
24	(6 0 1 2 3 4 5)	(-9 -7 -4 1 4 6 9)	(-1 -1 -1 0 1 1 1)	40	6	0
24	(6 0 1 2 3 5 4)	(-16 -7 1 3 4 6 9)	(-2 -1 0 0 1 1 1)	46	6	0
24	(6 1 0 2 3 4 5)	(-9 -7 -4 -3 1 6 16)	(-1 -1 -1 0 0 1 2)	46	6	0
24	(6 1 0 2 3 5 4)	(-16 -7 -3 1 3 6 16)	(-2 -1 0 0 0 1 2)	52	6	0
25	(0 1 2 3 4 5 6)	(-10 -5 0 1 3 5 6)	(-1 -1 0 0 0 1 1)	30	4	0
25	(0 2 1 3 4 5 6)	(-17 0 1 2 3 5 6)	(-2 0 0 0 0 1 1)	34	4	0
26	(0 1 2 3 4 5 6)	(-10 -5 -1 0 3 5 8)	(-1 -1 0 0 0 1 1)	32	4	0
26	(0 2 1 3 4 5 6)	(-17 -1 0 2 3 5 8)	(-2 0 0 0 0 1 1)	36	4	0

TAB. A.1 – Permutations associées aux assignations entre \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}' : extrait des résultats obtenus de manière empirique pour les échelles \mathcal{S}_1 à \mathcal{S}_{26} .

\mathcal{S}'	π	$(\delta'_{o(\bar{k})})$	$(a'_{o(\bar{k})})$	$\sum_{\bar{k}} \delta'_k $	$\sum_{\bar{k}} a'_k $	$\sum_{\bar{k}} a'_k$
27	(0 1 2 3 4 5 6)	(-10 -5 -2 0 3 6 8)	(-1 -1 0 0 0 1 1)	34	4	0
27	(0 2 1 3 4 5 6)	(-17 -2 0 2 3 6 8)	(-2 0 0 0 0 1 1)	38	4	0
28	(0 1 2 3 4 5 6)	(-10 -5 -1 0 1 5 10)	(-1 -1 0 0 0 1 1)	32	4	0
28	(0 1 2 3 4 6 5)	(-10 -5 -2 -1 0 1 17)	(-1 -1 0 0 0 0 2)	36	4	0
28	(0 2 1 3 4 5 6)	(-17 -1 0 1 2 5 10)	(-2 0 0 0 0 1 1)	36	4	0
28	(0 2 1 3 4 6 5)	(-17 -2 -1 0 1 2 17)	(-2 0 0 0 0 0 2)	40	4	0
29	(0 1 2 3 4 5 6)	(-10 -8 -5 0 5 8 10)	(-1 -1 -1 0 1 1 1)	46	6	0
29	(0 1 2 3 4 6 5)	(-10 -8 -5 -2 0 8 17)	(-1 -1 -1 0 0 1 2)	50	6	0
29	(0 2 1 3 4 5 6)	(-17 -8 0 2 5 8 10)	(-2 -1 0 0 1 1 1)	50	6	0
29	(0 2 1 3 4 6 5)	(-17 -8 -2 0 2 8 17)	(-2 -1 0 0 0 1 2)	54	6	0
30	(0 1 2 3 4 5 6)	(-11 -6 -1 2 4 5 7)	(-2 -1 0 0 1 1 1)	36	6	0
30	(0 1 2 3 5 4 6)	(-18 -1 1 2 4 5 7)	(-3 0 0 0 1 1 1)	38	6	0
31	(0 1 2 3 4 5 6)	(-11 -6 -1 0 4 5 9)	(-2 -1 0 0 1 1 1)	36	6	0
31	(0 2 1 3 4 5 6)	(-11 -6 -3 -1 0 5 16)	(-2 -1 0 0 0 1 2)	42	6	0
31	(0 1 2 3 5 4 6)	(-18 -1 0 1 4 5 9)	(-3 0 0 0 1 1 1)	38	6	0
31	(0 2 1 3 5 4 6)	(-18 -3 -1 0 1 5 16)	(-3 0 0 0 0 1 2)	44	6	0
32	(0 1 2 3 4 5 6)	(-11 -6 -2 -1 4 7 9)	(-2 -1 0 0 1 1 1)	40	6	0
32	(0 2 1 3 4 5 6)	(-11 -6 -3 -2 -1 7 16)	(-2 -1 0 0 0 1 2)	46	6	0
32	(0 1 2 3 5 4 6)	(-18 -2 -1 1 4 7 9)	(-3 0 0 0 1 1 1)	42	6	0
32	(0 2 1 3 5 4 6)	(-18 -3 -2 -1 1 7 16)	(-3 0 0 0 0 1 2)	48	6	0
33	(6 0 1 2 3 4 5)	(-12 -7 -2 3 4 6 8)	(-2 -1 0 0 1 1 1)	42	6	0
33	(0 6 1 2 3 4 5)	(-19 -2 0 3 4 6 8)	(-3 0 0 0 1 1 1)	42	6	0
34	(6 0 1 2 3 4 5)	(-12 -7 -2 1 3 6 11)	(-2 -1 0 0 0 1 2)	42	6	0
34	(6 0 2 1 3 4 5)	(-12 -7 -2 -1 1 3 18)	(-2 -1 0 0 0 0 3)	44	6	0
34	(0 6 1 2 3 4 5)	(-19 -2 0 1 3 6 11)	(-3 0 0 0 0 1 2)	42	6	0
34	(0 6 2 1 3 4 5)	(-19 -2 -1 0 1 3 18)	(-3 0 0 0 0 0 3)	44	6	0
35	(0 1 2 3 4 5 6)	(-13 -8 -3 2 5 7 10)	(-2 -1 0 0 1 1 1)	48	6	0
35	(0 1 2 3 4 6 5)	(-13 -8 -3 -2 2 7 17)	(-2 -1 0 0 0 1 2)	52	6	0
35	(0 1 2 4 3 5 6)	(-20 -3 -1 2 5 7 10)	(-3 0 0 0 1 1 1)	48	6	0
35	(0 1 2 4 3 6 5)	(-20 -3 -2 -1 2 7 17)	(-3 0 0 0 0 1 2)	52	6	0
36	(1 2 3 4 5 6 0)	(-13 -8 -3 2 3 7 12)	(-2 -1 0 0 0 1 2)	48	6	0
36	(0 2 3 4 5 6 1)	(-13 -8 -3 0 2 3 19)	(-2 -1 0 0 0 0 3)	48	6	0
36	(1 2 3 5 4 6 0)	(-20 -3 -1 2 3 7 12)	(-3 0 0 0 0 1 2)	48	6	0
36	(0 2 3 5 4 6 1)	(-20 -3 -1 0 2 3 19)	(-3 0 0 0 0 0 3)	48	6	0

TAB. A.2 – Permutations associées aux assignations entre \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}' : extrait des résultats obtenus de manière empirique pour les échelles \mathcal{S}_{27} à \mathcal{S}_{36} .

\mathcal{S}'	π	$(\delta'_{o(\bar{k})})$	$(a'_{o(\bar{k})})$	$\sum_{\bar{k}} \delta'_k $	$\sum_{\bar{k}} a'_k $	$\sum_{\bar{k}} a'_k$
7	(6 0 1 2 3 4 5)	(-14 -9 -4 1 6 9 11)	(-2 -1 -1 0 1 1 2)	54	8	0
37	(6 0 1 2 3 5 4)	(-16 -14 1 3 6 9 11)	(-2 -2 0 0 1 1 2)	60	8	0
37	(6 0 2 1 3 4 5)	(-14 -9 -4 -1 1 9 18)	(-2 -1 -1 0 0 1 3)	56	8	0
37	(5 0 1 2 3 4 6)	(-21 -4 -2 1 6 9 11)	(-3 -1 0 0 1 1 2)	54	8	0
37	(6 1 0 2 3 4 5)	(-14 -9 -4 -3 1 6 23)	(-2 -1 -1 0 0 1 3)	60	8	0
37	(6 0 2 1 3 5 4)	(-16 -14 -1 1 3 9 18)	(-2 -2 0 0 0 1 3)	62	8	0
37	(6 1 0 2 3 5 4)	(-16 -14 -3 1 3 6 23)	(-2 -2 0 0 0 1 3)	66	8	0
37	(5 0 2 1 3 4 6)	(-21 -4 -2 -1 1 9 18)	(-3 -1 0 0 0 1 3)	56	8	0
37	(5 1 0 2 3 4 6)	(-21 -4 -3 -2 1 6 23)	(-3 -1 0 0 0 1 3)	60	8	0
37	(4 0 1 2 3 5 6)	(-28 -2 1 3 6 9 11)	(-4 0 0 0 1 1 2)	60	8	0
37	(6 2 0 1 3 4 5)	(-14 -9 -4 -3 -1 1 30)	(-2 -1 -1 0 0 0 4)	62	8	0
37	(6 2 0 1 3 5 4)	(-16 -14 -3 -1 1 3 30)	(-2 -2 0 0 0 0 4)	68	8	0
37	(4 0 2 1 3 5 6)	(-28 -2 -1 1 3 9 18)	(-4 0 0 0 0 1 3)	62	8	0
37	(4 1 0 2 3 5 6)	(-28 -3 -2 1 3 6 23)	(-4 0 0 0 0 1 3)	66	8	0
37	(5 2 0 1 3 4 6)	(-21 -4 -3 -2 -1 1 30)	(-3 -1 0 0 0 0 4)	62	8	0
37	(4 2 0 1 3 5 6)	(-28 -3 -2 -1 1 3 30)	(-4 0 0 0 0 0 4)	68	8	0
38	(0 1 2 3 4 5 6)	(-15 -10 -5 0 5 10 15)	(-2 -1 -1 0 1 1 2)	60	8	0
38	(0 1 2 3 4 6 5)	(-15 -10 -5 -2 0 15 17)	(-2 -1 -1 0 0 2 2)	64	8	0
38	(0 2 1 3 4 5 6)	(-17 -15 0 2 5 10 15)	(-2 -2 0 0 1 1 2)	64	8	0
38	(0 2 1 3 4 6 5)	(-17 -15 -2 0 2 15 17)	(-2 -2 0 0 0 2 2)	68	8	0
38	(0 1 2 3 5 4 6)	(-15 -10 -5 0 3 5 22)	(-2 -1 -1 0 0 1 3)	60	8	0
38	(0 1 3 2 4 5 6)	(-22 -5 -3 0 5 10 15)	(-3 -1 0 0 1 1 2)	60	8	0
38	(0 1 3 2 4 6 5)	(-22 -5 -3 -2 0 15 17)	(-3 -1 0 0 0 2 2)	64	8	0
38	(0 2 1 3 5 4 6)	(-17 -15 0 2 3 5 22)	(-2 -2 0 0 0 1 3)	64	8	0
38	(0 1 3 2 5 4 6)	(-22 -5 -3 0 3 5 22)	(-3 -1 0 0 0 1 3)	60	8	0
38	(0 1 2 3 6 4 5)	(-15 -10 -5 -2 0 3 29)	(-2 -1 -1 0 0 0 4)	64	8	0
38	(0 2 3 1 4 5 6)	(-29 -3 0 2 5 10 15)	(-4 0 0 0 1 1 2)	64	8	0
38	(0 2 1 3 6 4 5)	(-17 -15 -2 0 2 3 29)	(-2 -2 0 0 0 0 4)	68	8	0
38	(0 2 3 1 4 6 5)	(-29 -3 -2 0 2 15 17)	(-4 0 0 0 0 2 2)	68	8	0
38	(0 1 3 2 6 4 5)	(-22 -5 -3 -2 0 3 29)	(-3 -1 0 0 0 0 4)	64	8	0
38	(0 2 3 1 5 4 6)	(-29 -3 0 2 3 5 22)	(-4 0 0 0 0 1 3)	64	8	0
38	(0 2 3 1 6 4 5)	(-29 -3 -2 0 2 3 29)	(-4 0 0 0 0 0 4)	68	8	0

TAB. A.3 – Permutations associées aux assignations entre \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}' : extrait des résultats obtenus de manière empirique pour les échelles \mathcal{S}_{37} à \mathcal{S}_{38} .

Bibliographie

- Agmon, E. (1989). A mathematical model of the diatonic system. *Journal of Music Theory* 33(1), 1–25.
- Agmon, E. (1995). Functional harmony revisited : A prototype-theoretic approach. *Music Theory Spectrum* 17(2), 196–214.
- Agmon, E. (1996). Coherent tone-systems : A study in the theory of diatonicism. *Journal of Music Theory* 40(1), 39–59.
- Alaleona, D. (1911). I moderni orizzonti della tecnica musicale : teoria della divisione dell’ottava in parti uguali. *Rivista musicale italiana xviii*, 382–420.
- Amiot, E. (2007). David lewin and maximally even sets. *Journal of Mathematics and Music* 1(3), 157–172.
- Andreatta, M. (2003). *Méthodes algébriques dans la musique et la musicologie du XXème siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels*. Ph. D. thesis, École des Hautes Etudes en Sciences Sociales.
- Andreatta, M., J.-M. Bardez, and J. Rahn (2008). *Autour de la Set Theory*. Sampzon : Ircam/Delatour.
- Audétat, P. (2006). La cloche diatonique. Document interne du CdL-HEM.
- Balzano, G. J. (1980). The group-theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems. *Computer Music Journal* 4(4), 66–84.
- Balzano, G. J. (1982). *The Pitch Set as a Level of Description for Studying Musical Pitch Perception*. New York : Plenum Press.
- Barbour, J. M. (1949). Musical scales and their classification. *The Journal of the Acoustical Society of America* 21(6), 586–589.
- Benson, D. J. (2007). *Music : a mathematical offering*. Cambridge University Press.
- Browne, R. (1981). Tonal implications of the diatonic set. *Theory Only* 5(6-7), 3–21.

- Burnside, W. (1897). *Theory of groups of finite order*. Cambridge : The University press.
- Busoni, F. (1907). *Entwurf einer neuen Aesthetik der Tonkunst*. Triest : Schmidt.
- Callender, C. and R. Hall (2007). Homometric sets and z-related chords. In *American Mathematical Society National Conference New Orleans*. American Mathematical Society.
- Carey, N. and D. Clampitt (1989). Aspects of well-formed scales. *Music Theory Spectrum* 11(2), 187–206.
- Clough, J. (1979). Aspects of diatonic sets. *Journal of Music Theory* 23(1), 45–61.
- Clough, J. and J. Douthett (1991). Maximally even sets. *Journal of Music Theory* 35(1/2), 93–173.
- Clough, J. and G. Myerson (1985). Variety and multiplicity in diatonic systems. *Journal of Music Theory* 29(2), 249–270.
- Costère, E. (1954). *Lois et styles des harmonies musicales*. Paris : Presses universitaires de France.
- Costère, E. (1962). *Mort ou transfigurations de l'harmonie*. Paris : Presses universitaires de France.
- Denéréaz, A. (1937). *Cours d'harmonie : données physiques, historiques, psychologiques : ouvrage officiellement adopté par le Conservatoire de Lausanne*. Lausanne et Paris : Foetisch Frères et Rouart Leroll.
- Durutte, C. (1855). *Esthétique musicale. Technie, ou lois générales du système harmonique*. Paris : Mallet-Bachelier.
- Forte, A. (1973). *The structure of atonal music*. New Haven : Yale University Press.
- Fripertinger, H. (1993). *Enumeration in Musical Theory*, Volume 1 of *Beiträge zur elektronischen Musik*. Graz : Institut für elektronische Musik an der Hochschule für Musik und darstellende Kunst.
- Fripertinger, H. (1999). Enumeration and construction in music theory.
- Gamer, C. (1967a). Deep scales and difference sets in equal-tempered systems. In A. S. of Univesity Composer (Ed.), *Proceedings of the Second Annual Conference*, pp. 113–122.
- Gamer, C. (1967b). Some combinational resources of equal-tempered systems. *Journal of Music Theory* 11(1), 32–59.

- Gil, J. and J. Estrada (1984). *Música y Teoría de Grupos finitos*. Mexique : IIE, UNAM.
- Hába, A. (1927). *Neue Harmonielehre des diatonischen, chromatischen Viertel-, Drittel-, Sechstel- u. Zwölftel-Tonsystems*. Leipzig : F. Kistner und C. F. W. Siegel.
- Johnson, T. A. (2003). *Foundations of diatonic theory : a mathematically based approach to music fundamentals*. Emeryville, CA : Key College Pub.
- Knuth, D. E. (2005). *The art of computer programming*. Upper Saddle River : Addison-Wesley.
- Lateef, Y. A. (1981). *Repository of Scales and Melodic Patterns*. Amherst, MA : Fana Music.
- Lemke, P., S. S. Skiena, and W. D. Smith (2002). Reconstructing sets from interpoint distances. Technical Report 37, DIMACS.
- Lewin, D. (1960). Re : The intervallic content of a collection of notes, intervallic relations between a collection of notes and its complement : An application to schoenberg's hexachordal pieces. *Journal of Music Theory* 4(1), 98–101.
- Picard, F. (2005). Echelles et modes, pour une musicologie généralisée.
- Quinn, I. (2004). *A Unified Theory of Chord Quality in Equal Temperaments*. Ph. D. thesis, Eastman School of Music, University of Rochester, Rochester, New York.
- Slonimsky, N. (1947). *Thesaurus of Scales and Melodic Patterns*. New York, NY : Charles Scribner's Sons.
- Vieru, A. (1980). *Cartea modurilor*. Bucharest : Muzicală.

Index

- Structure intervallique, 30
- Association minimale, 50
- Cercle ordonné, 16
- Contenu intervallique, 28
- Degré, 18
- Degré diatonique, 43
- Différence chromatique, 41
- Direction chromatique, 42
- Distance chromatique, 41
- Distance euclidienne normalisée, 57
- Echelle, 16
- Ensemble des échelles, 16
- E -équivalence, 30
- E^* -équivalence, 30
- Équivalence par transformation affine, 22
- Z -équivalence, 28
- Espace des altérations chromatiques, 41
- Espace des degrés diatoniques, 43
- Groupe affine, 19
- Groupe cyclique, 19
- Groupe diédral, 19
- Indice de périodicité, 60
- Indice de répartition, 61
- Indice de symétrie, 57
- Mode, 17
- Nombre scalaire d'altérations, 44
- Strictement inférieur, 17
- Symétrie affine, 19
- Transformée de Fourier, 28
- Vecteur d'altérations chromatiques, 41
- Vecteur des degrés diatoniques, 43